

Matematiska förmågors interaktion och det matematiska minnets roll vid lösning av matematiska problem

Attila Szabo

Licentiatavhandling

Rapporter i matematikämnets och naturvetenskapsämnenas didaktik

Nummer 4, 2013

Matematiska förmågors interaktion och det matematiska minnets roll vid lösning av matematiska problem

Attila Szabo

©Attila Szabo, Stockholms universitet 2013
ISBN 978-91-7447-635-4

Tryckeri: Universitetsservice US-AB, Stockholm 2013
Distributör: Institutionen för matematikämnets och naturvetenskapsämnenas
didaktik

Docendo discimus

Innehåll

Sammanfattning	9
Abstract	9
Förord	11
Introduktion	13
Matematisk förmåga	14
Matematiskt minne	14
Matematikdidaktisk forskning	15
Skolämnet matematik i Sverige	16
Studiens syfte	17
Teoretiska perspektiv och vägval för studien	18
Begåvning och förmågor	18
En historisk överblick	18
Begåvningsmodeller	20
På vilket sätt utvecklas förmågor till expertis?	23
Implikationer för studien	24
Matematisk förmåga	24
Matematik	24
Matematisk förmåga – förklaringsmodeller	25
Implikationer för studien	32
Matematiskt minne	33
Att memorera siffror	35
Matematiskt minne enligt Krutetskii	37
Implikationer för studien	41
Kognitiva och biologiska modeller för minneshantering	43
Matematikens närvaro i minnet	43
Implikationer för studien	48
Metod	50
Undersökningsmetod	50
Datainsamlingsmetod	53
Den empiriska studien	57
Planering	57
Urval av deltagare	58
Val av matematiska problem	58
Observationer i samband med problemlösning	61
Intervjuer efter observationer	62
Etiska ställningstaganden	62
Analys	64
Analysmall för de undersökta förmågorna	64

Analysmall.....	65
Analys av de givna matematiska problemen	65
Observationsanalys.....	71
Analys av efterföljande intervjuer.....	74
Analysens reliabilitet.....	79
Resultat.....	80
Matematiska förmågors interaktion vid problemlösning av nya matematiska problem.....	80
Gemensamma faser i problemlösningen.....	80
Förmågan att generalisera matematiska samband kunde inte identifieras	86
Vad händer om den valda metoden inte leder till önskat resultat?	87
Kvalitativa skillnaden mellan lösningsmetoder.....	91
Kvantitativa data	95
Den individuella strukturen av elevernas matematiska förmåga.....	95
Den generella strukturen av elevers matematiska förmåga.....	97
Det matematiska minnets roll vid problemlösning av nya matematiska problem.....	98
Det matematiska minnet används mest i samband med förmågan att insamla matematisk information.....	98
Det matematiska minnet är avgörande för valet av lösningsmetod.....	103
Vikten av generaliserade lösningsmetoder.....	106
Diskussion.....	110
Metod.....	110
Matematiska förmågors interaktion vid problemlösning av för eleven nya matematiska problem.....	111
Det matematiska minnets roll vid problemlösning av för eleven nya matematiska problem.....	114
Möjliga konsekvenser för undervisningen.....	116
Referenser.....	119
Bilagor.....	125
Bilaga 1	127
Brev till elever och deras målsmän.....	127
Bilaga 2	130
Instruktioner till elever inför problemlösningen	130

Sammanfattning

Denna avhandling handlar om matematiska förmågors interaktion och det matematiska minnets roll vid problemlösning. För att undersöka dessa företeelser har jag valt att observera matematiska förmågors uttryck hos högpressterande gymnasieelever genom att analysera elevers agerande i samband med problemlösning av för eleverna nya och utmanande matematiska problem. Eleverna löste problemen individuellt, under enskilda observationer. Studien visar att elevernas problemlösningsaktiviteter innehåller tre gemensamma faser och att dessa faser följer en bestämd kronologisk ordning. De nämnda faserna definieras av de matematiska förmågor som är mest framträdande under problemlösningens respektive fas. Vidare visar studien att det matematiska minnet tar i anspråk en relativt liten andel tid av problemlösningensprocessen och att det matematiska minnet framträder huvudsakligen under problemlösningens inledande fas. Trots att det matematiska minnet tar i anspråk en liten andel tid av processen, så är det matematiska minnet avgörande för valet av problemlösningsmetoder eftersom eleverna väljer sina lösningsmetoder i processens inledande fas. Studien visar att valet av problemlösningsmetod har viktiga konsekvenser för elevers problemlösning. Om de valda problemlösningsmetoderna inte ledde till önskat resultat, så hade eleverna mycket svårt för att ändra sina initialt valda lösningsmetoder. Studien visar också att elever som använder allmänna, dvs. algebraiska, problemlösningsmetoder presterar bättre än elever som använder numeriska metoder.

Abstract

The interaction of mathematical abilities and the role of the mathematical memory in the solution of mathematical problems

This thesis deals with the interaction of mathematical abilities and the mathematical memory's role in problem-solving. To examine those phenomena, I have chosen to observe the expression of mathematical abilities for high achieving students from upper secondary school by analyzing students' behavior in the context of problem-solving of – for the students – new and challenging mathematical problems. The students solved the problems individually, during individual observations. The study shows that students' problem-solving activities include three common phases respectively and that those phases follow a certain chronological order. The mentioned phases are defined by those mathematical abilities that are most prominent during the respective problem-solving phase. Furthermore, the study shows that the mathematical memory accounts for a relatively small proportion of time of the problem-solving process and that the mathematical memory emerges

mainly during the initial phase of the process. Although the mathematical memory accounts for a small percentage of the time of the problem-solving process, the mathematical memory has a decisive role for the choice of problem-solving methods, because the students choose their solution methods in the initial phase of their problem-solving activity. The study shows that the choice of problem-solving method has significant consequences for the students' problem-solving activity; if the chosen methods did not lead to the desired outcome, so the students found it very difficult to change their initially chosen problem-solving methods. The study also shows that students who use general, i.e. algebraic, problem-solving methods perform better than students who use numerical methods.

Förord

Härmed vill jag tacka alla som har gjort det möjligt för mig att skriva denna avhandling.

Inledningsvis vill jag tacka Utbildningsförvaltningen i Stockholms stad som har finansierat denna studie.

Men framför allt vill jag tacka mina handledare för allt stöd och för alla inspirerande, lärorika samtal. Min huvudhandledare, Inger Wistedt och min biträdande handledare, Kerstin Pettersson, har gett mig förtroende och många goda råd under processens gång. Deras vänlighet och hjälpsamhet har skapat balans och harmoni i min arbetssituation, en situation som stundtals har varit ansträngd på grund av ett stort antal konkurrerande projekt från min ordinarie arbetsplats.

Jag vill tacka eleverna som tyvärr för alltid kommer att omnämnas som X1, X2, X3, X4, X5 och X6 i samband med denna studie. Utan deras uppriktiga intresse för matematisk problemlösning och deras allvarsamma inställning i samband med de individuella observationerna, skulle jag aldrig kunnat genomföra denna studie. Ett stort tack även till matematikläraren som möjliggjorde urvalet av dessa förträffliga elever. Det lite tråkigt att jag – på grund av etiska ställningstaganden – inte kan nämna dessa personer vid namn i dessa texter.

Avslutningsvis vill jag framhäva att denna studie är det roligaste och mest inspirerande projekt som jag har genomfört på mycket länge.

Introduktion

Med all sannolikhet har var och en av oss egna minnen i samband med matematikproven från skoltiden. Förmodligen minns vi förväntningarna inför provet, det febrila arbetet under själva skrivningen och att det alltid handlade om någon sorts problemlösning som skulle utföras under en begränsad tid. Men hur agerade vi när vi såg uppgifterna som ingick i provet? Svaret på den frågan är naturligtvis individuellt. Några blev säkert glada när man äntligen fick se uppgifterna, eftersom de insåg att de har goda chanser att klara provet, andra blev förmodligen oroliga eftersom uppgifterna såg alltför svåra ut.

Jag minns att varje gång jag tittade på en uppgift, så kunde jag kort efteråt svara på om jag kunde lösa den eller inte. Och det hände ytterst sällan att jag bedrog mig själv i det avseendet. Oftast visste jag hur jag skulle lösa uppgiften men ibland hände det att jag inte hade någon aning om vad jag skulle göra. I det senare fallet drog jag slutsatsen att jag borde ha studerat mer inför det aktuella provet, vilket ledde till att jag studerade lite mer och löste några fler uppgifter inför nästa prov. Jag inser nu att jag inte alls var påhittig och kreativ i provsammanhang, utan försökte istället minnas hur jag skulle lösa problemen som ingick i provet.

Långt senare i livet, när jag undervisade matematik på gymnasiet, kunde jag ofta upptäcka liknande resonemang hos eleverna. I diskussionerna efter proven konstaterade eleverna att de antingen mindes hur man löste ett visst problem eller så gjorde de inte det. I det senare fallet hände det ytterst sällan att de löste problemet. Detta gjorde mig naturligtvis fundersam och jag började undra om skolmatematiken handlar alltför mycket om minneshantering. Kan det vara så att vi premierar elever som kommer ihåg saker och straffar de som inte gör det? Och vad händer i så fall med de elever som vill upptäcka matematiken på egen hand? Måste de minnas all matematik som de har studerat eller kan de konstruera sin egen kunskap, på liknande sätt som de gör i andra ämnen som t.ex. språk, historia eller geografi?

Mina funderingar kunde lika gärna stannat på det retoriska planet om det inte skulle varit för en annan händelse som har påverkat mig starkt. Händelsen utspelade sig under en universitetstentamen i en fördjupningskurs i differentialekvationer. Jag minns att när jag såg uppgifterna, trodde jag att jag kunde lösa dem allihop. Tiden gick relativt långsamt, vilket ledde till att jag efter en tredjedel av provtiden bara hade ett problem kvar att lösa. Det sista problemet såg bekant ut och jag visste exakt hur jag skulle lösa det. Men sedan hände det något märkligt; trots att jag var säker på att jag använde rätt metod, så kunde jag inte lösa problemet. Och tiden började gå allt fortare. Men efter en förhållandevis lång stund av förtvivlan kunde jag plötsligt minnas en nästan exakt likadan uppgift; skillnaden var att i den uppgiften var det ett plustecken istället för ett minustecken på ett bestämt ställe i problemformuleringen. Efter ytterligare några minuter insåg jag att jag inte kunde lösa

problemet så som det var formulerat, alltså bytte jag ut plustecknet mot minustecken och löste sedan det ändrade problemet. Halva tentamenstiden var fortfarande kvar när jag lämnade in skrivningen och direkt efteråt råkade jag träffa lektorn som var ansvarig för provet. När jag berättade för honom om mitt agerande under provet, blev han mycket orolig. Det visade sig att det var ett tryckfel i provet. Det sista problemet kunde inte lösas så som det var formulerat. Lektorn gick in i skrivsalen och påpekade felet för studenterna som på så sätt kunde undvika problematiken som jag tidigare upplevt.

Den historien kunde också ha slutat där, med glada studenter och min egen tillfredsställelse över att jag hade upptäckt ett fel i tentamen. Men på senare år har jag återigen börjat fundera på vad det är som händer med oss när vi löser matematiska problem. Vad händer när vi inte riktigt vet hur problemet ska lösas? Måste vi förlita oss på vårt minne eller finns det andra förmågor som aktualiseras under problemlösningen? Och i så fall, vilka förmågor är aktuella i samband med matematisk problemlösning? Jag hoppas att jag med hjälp av den presenterade studien kan aktualisera dessa frågeställningar.

I denna studie undersöker jag hur högpresterande gymnasieelever löser matematiska problem som de inte har sett förut. På så sätt hoppas jag kunna kartlägga vilka matematiska förmågor som behövs för att lösa matematiska problem och vilken betydelse minnet har vid lösning av dessa problem. I kapitlet som diskuterar teoretiska vägval för studien kommer jag även att redogöra varför jag väljer att studera högpresterande elever.

Matematisk förmåga

Människans olika förmågor har länge sysselsatt forskare och studier har visat att våra förmågor är delvis medfödda men att de framför allt är utvecklingsbara (Bloom & Sosniak, 1985; Mönks & Ypenburg, 2009; Ziegler, 2010). Studier som har kartlagt den matematiska förmågans struktur visar att även den matematiska förmågan är utvecklingsbar och att den utvecklas genom att individen deltar i matematiska aktiviteter (Juter & Sriraman, 2011; Krutetskii, 1976; Rosca & Zörgö, 1973; Sheffield, 2003). Genom att observera individer som löser matematiska problem, har nämnda studier även lyckats identifiera några viktiga komponenter i den sammansatta matematiska förmågan. Dessa komponenter kommer jag att beskriva utförligt i kapitlet som diskuterar de teoretiska vägvalen för denna studie.

Matematiskt minne

Att skilja på det vi minns och det vi kan är utomordentligt problematiskt, följaktligen är det inte särskilt meningsfullt att resonera om kunskaper som vi inte kan återkalla ur minnet (Gärdenfors, 2010). Studier i kognitiv neuro-

vetenskap har visat att vår minneshantering är differentierad. Det är skillnad på minnen som leder till aktiviteter som kan utföras automatiskt och på minnen som innehåller faktakunskaper eller tidigare upplevda händelser (Ingvar, 2009a; Ingvar, 2009b; Klingberg, 2007; Nyberg & Bäckman, 2009). Den mest omfattade studien av den matematiska förmågan (Krutetskii, 1976) har dessutom definierat *matematiskt minne* som en viktig komponent i den nämnda förmågan. I det avseendet har forskarna identifierat det matematiska minnet som ett minne för *generaliserade matematiska samband* och man har också visat att komponenten är observerbar under problemlösningsprocessen (Krutetskii, 1976). I kapitlet som diskuterar de teoretiska vägvalen för denna studie kommer jag att diskutera skillnader och likheter mellan olika minnes typer. Jag kommer också att resonera om kopplingar mellan den psykologiska definitionen av matematiskt minne samt kognitiva och biologiska modeller för minneshantering.

Matematikdidaktisk forskning

Termen didaktik härstammar från grekiskans *didáskein* med betydelsen *lära ut, undervisa*. I en psykoanalytisk ansats från 1925 definieras didaktik som *undervisningslära*, vilket kan betraktas som en fortfarande gångbar definition (Blankertz, 1987). Enligt den nämnda definitionen ska didaktiken studera undervisningsprocessens naturlagsenliga sammanhang och följaktligen avvisa arbetssätt som endast grundar sig i lärarens subjektiva metoder. En överblick över didaktikens utveckling visar att man betydligt överskattat didaktikens möjligheter att leverera exakta utsagor om undervisningens betingelser, men man har även underskattat dess potential till att hitta nya inriktningar (Maasz & Schloeglmann, 2006).

De första svenska texterna som kan uppfattas som matematikdidaktiska härstammar från 1910, då både *Åskådningsmatematik* av Anna Kruse och *Vägledning vid den första undervisningen i räkning* av Karl Petter Nordlund publicerades (Bergsten, 2002). Den första doktorsavhandlingen handlade om problemlösning och lades fram 1919 av Karl Gustav Jonsson vid Uppsala universitet (Johansson, 1985).

Den svenska forskningens huvudsakliga produktion börjar på 1990-talet, vilket tyder på att den svenska forskningen – i ett internationellt perspektiv – är relativt nyttillkommen (Strässer, 2005). En konsekvens av det nya forskningsfältet är att vissa, internationellt sett starka teoretiska forskningsansatser – som t.ex. det *epistemologiska perspektivet*, den *semiotiska ansatsen*, *verksamhetsteorin*, den *sociokulturella ansatsen* och *uppfattningar och attityder till matematiken* – är relativt underrepresenterade i Sverige (Bergsten, 2007).

I sammanhanget bör vi också notera att den svenska och nordiska matematikdidaktiska forskningen främst fokuserat elevers svårigheter i ämnet

(Bergqvist, 2003). En konsekvens av den fokuseringen är att det i skrivande stund (hösten 2012) endast finns två svenska studier som har undersökt elevers matematiska förmågor och hur dessa förmågor uttrycks och värderas i skolsystemet (Dahl, 2011; Pettersson, 2011).

Eftersom det i Sverige saknas studier som undersöker det matematiska minnets roll vid problemlösning och ytterst få studier har undersökt elevers matematiska förmågor, så kan denna studie bidra med relativt nya infallsvinklar till det svenska matematikdidaktiska forskningsfältet.

Skolämnet matematik i Sverige

Skolämnet matematik och undervisningen i ämnet har sedan 2005 varit nationellt prioriterade utvecklingsområden. Men trots den nationella prioriteringen, visar både nationella och internationella jämförelser att svenska elevers matematikresultat har försämrats under det senaste decenniet (Skolverket, 2009, 2010a, 2011a).

Analyser (Skolverket, 2007, 2010b) visar att eleverna lär sig att utföra beräkningar som ofta saknar begreppslig förankring, de lär sig inte att förstå sambanden mellan de olika matematiska momenten. Utan begreppslig förankring får eleverna svårt att lösa matematiska problem, dvs. komplexa matematiska uppgifter i nya sammanhang. Den enskilt viktigaste förklaringen till de försämrade resultaten är att undervisningen domineras av tyst räkning, dvs. eleverna jobbar på egen hand ur läroböckerna – vilket medför att andelen lärarledd förståelsebaserad undervisningstid har minskat i den svenska skolan (Skolverket, 2003, 2004, 2007, 2011a).

Med början av höstterminen 2011 har nya nationella läroplaner introducerats i både grund- och gymnasieskolan. I ämnesplanerna för matematik är problemlösning en central komponent bland de matematiska kompetenser och förmågor som eleverna ska utveckla genom undervisningen i ämnet (Skolverket, 2011b, 2011c):

Undervisningen ska stärka elevernas tilltro till sin förmåga att använda matematik i olika sammanhang samt ge utrymme åt problemlösning som både mål och medel. (Utbildningsdepartementet, 2010, s.87)

För att nå det högsta betyget i matematik i gymnasiet, krävs det att:

Eleven kan formulera, analysera och lösa matematiska problem av komplex karaktär. Dessa problem inkluderar flera begrepp och kräver avancerade tolkningar. ... I arbetet gör eleven om realistiska problemsituationer till matematiska formuleringar genom att välja, tillämpa och anpassa matematiska modeller. Eleven kan utvärdera med nyanserade omdömen resultatets rimlighet samt valda modeller, strategier, metoder och alternativ till dem. (Utbildningsdepartementet, 2010, s.106)

Sammanfattningsvis kan jag konstatera att trots att problemlösning enligt läroplanen är en viktig del av skolämnet matematik, så uppvisar svenska elever stora brister i måluppfyllelse när det gäller just problemlösning. Val och anpassning av matematiska modeller och metoder i samband med problemlösning är viktiga kompetenser i elevens strävan att uppnå det högsta betyget i ämnet. Följaktligen förefaller det vara meningsfullt att studera den matematiska förmågans sammansättning i samband med elevers problemlösning.

Studiens syfte

Min ambition är att undersöka sammansättningen av och dynamiken mellan matematiska förmågor ur följande två perspektiv:

- På vilket sätt interagerar matematiska förmågor vid problemlösning av för eleven nya matematiska problem?
- På vilket sätt används det matematiska minnet vid problemlösning av för eleven nya matematiska problem?

Under mina observationer kommer jag att vara uppmärksam dels på om det finns några matematiska förmågor som samverkar mer påtagligt än andra och dels på vilka konsekvenser deras samverkan kan tänkas ha på problemlösningsprocessen. Jag kommer också att undersöka om och på vilket sätt det matematiska minnet interagerar med elevers förmåga att insamla matematisk information.

Teoretiska perspektiv och vägval för studien

I det här avsnittet kommer jag att presentera de teoretiska perspektiv som har påverkat studiens utformning. Avsnittens sammanställning har följande struktur: först presenterar jag de teoretiska perspektiv som hör till respektive forskningsområde och sedan beskriver jag implikationerna som de nyligen presenterade teorierna har för studien.

Inledningsvis kommer jag att presentera hur begåvning och förmågor beskrivs i forskningslitteraturen; jag kommer att ge en historisk överblick över begreppens utveckling och kommer även att redovisa olika modeller för identifiering av begåvning och förmågor. Därefter kommer jag att presentera en översikt av forskning som behandlar matematisk förmåga och dess komponenter. Jag kommer även att argumentera för mitt val av modell för matematisk förmåga.

I nästföljande avsnitt beskriver jag hur matematiskt minne uppfattas inom det matematikdidaktiska forskningsfältet och på vilket sätt det matematiska minnet skiljer sig från övriga minnesfunktioner, som t.ex. förmågan att mekaniskt memorera namn och siffror.

Avslutningsvis kommer jag att redogöra för kognitiva och biologiska modeller för minneshantering. Det avslutande avsnittets roll är framför allt att redovisa forskningsansatser som beskriver det matematiska minnet i perspektiv som ligger utanför det didaktiska och pedagogiska forskningsfältet. Som jag nämnde inledningsvis, implikationerna som de presenterade teoretiska perspektiven kan tänkas ha för studien kommer att diskuteras i direkt anslutning till respektive teoretiskt perspektiv.

Begåvning och förmågor

De flesta begrepp som förklarar *utomordentliga prestationer* härrör ur vardagsspråket och är intimt förknippade med termerna *begåvning*, *förmåga* och *talang* (Ziegler, 2010). För att bättre förstå hur dessa termer används inom forskningsfältet, så kommer jag inledningsvis att presentera en överblick av deras historiska utveckling.

En historisk överblick

De första dokumenterade försöken att förklara utomordentliga prestationsförmågor med någon sorts medfödd begåvning har sina rötter i antikens mytologi. I Platons Grekland, i ett försök att frikoppla begåvning från individen och dennes utvecklingsbara kunskaper, kallades särbegåvade barn för ”himmelska barn” – på det sättet poängterade man att begåvning var en gåva från gudarna och inte människans verk (Wistedt, 2005; Ziegler, 2010).

Den antika uppfattningen om att begåvningar och förmågor inte är förvärvade eller personliga egenskaper förmedlades nästan oförändrat av kristendomen. En beskrivning som tydligt vittnar om det synsättet är: ”vi har olika gåvor allt efter den nåd vi har fått” (Bibeln, 2010, Romarbrevet, kap.12). Den tidiga kristna uppfattningen ändrades först inom det latinska språkområdet, där, från och med 300-talet, särskilda förmågor knöts till individen och dennes personlighet. Utvecklingen såg annorlunda ut i det mellan- och nord-europeiska språkområdet; i dessa regioner skulle det dröja till 1300-talet tills liknande tankar fick fotfäste. Men efter ytterligare ett par århundraden, framförallt på grund av protestantismens landvinningar, utvecklades även i detta geografiska område uppfattningen att människans framgång på jorden var ett uttryck för Guds välsignelse – och i nästa led propagerade man för att ”den goda gärningen” inte längre gällde bara vardagens moraliska aspekter, utan även den ekonomiska framgång som man lyckades uppnå i livet. På det sättet bidrog protestantismen till att knyta särskilda begåvningar och förmågor till individen och renässansen gjorde sedan den kopplingen ännu mer innebördsrik med sitt uttalade syfte att nyttja begåvningar på ett, för individ och samhälle, meningsfullt sätt (Ziegler, 2010).

Och det var också under den tiden som termen *talang* för första gången användes i samband med begåvning. År 1537 blev filosofen Paracelsus först med att använda uttrycket för att beskriva hur intellektuell förmåga och fallenhet är något som individen kan utnyttja för att uppnå personliga mål (Passow, Mönks, & Heller, 1993). Ytterligare viktiga bidrag till det moderna begåvningsbegreppet tillkom under upplysningstiden, på 1600- och 1700-talet. En av upplysningens centrala teser var att:

... förnuftet är i stånd att upptäcka sanningen och föra fram den i ljuset – och detta inte längre som ett individuellt kopierande och förhärlikande av en gudomlig värld utan som en individuell *konstruktion* (Ziegler, 2010, s.13).

Att tänka logiskt, kritiskt och självständigt upphöjdes till en dygd (Cassirer, 1998) och många nya begrepp som relateras till förmågor och talang fick nya innebörder. Men trots att begreppen blev mer vetenskapliga med tiden, fortsatte, under de nästföljande århundradena, försöken att förklara utomordentliga prestationer med irrationella föreställningar (Ziegler, 2010). Under 1900-talet har begåvningsbegreppet mer eller mindre sekulariserats och upplysningstidens konstruktivistiska grundtankar har ersatts av modernare begrepp som t.ex. *intelligens*, *geni* och *kreativitet*.

Att individens förmågor bestäms enbart av dennes gener är en hypotes som avfärdades redan under 1970-talet (Rosca & Zörgö, 1973). Forskarna menar vidare att våra olika förmågor utvecklas genom mentala processer och att det är nästintill omöjligt att prata om förmågor som inte är förknippade med ett avgränsat aktivitetsområde. Men de understryker att

... det är felaktigt att tro att det bara är individer som uppvisar utomordentliga resultat inom något aktivitetsområde som besitter förmågor (Rosca & Zörgö, 1973, s.14; min översättning).

Rosca och Zörgö (1973) differentierar även färdigheter och förmågor genom att notera att färdigheter, i takt med deras utveckling och fulländning, blir mer och mer automatiserade och därmed styrda av förenklade mekanismer, medan förmågor utvecklas på det motsatta sättet.

Mot slutet av förra århundradet har hög begåvning börjat betraktas som en värdefull tillgång i industriländerna och inom begåvningsforskning har man gjort flera försök att med hjälp av empiriska metoder fastställa kriterier som kännetecknar begåvade individer. Dessa försök har emellertid inte lett till entydiga resultat och begreppen som begåvade individer förknippas med divergerar fortfarande (Ziegler, 2010). En genomgång av forskningslitteraturen visar att dessa begrepp är ideologiskt och geografiskt differentierade – ett fenomen som framförallt beror på att forskarna vill göra om begrepp och idéer från vardagsspråket till vetenskapliga termer genom att empiriskt underbygga dem (Bloom & Sosniak, 1985; Mönks & Ypenburg, 2009; Ziegler, 2010).

Den vedertagna svenska benämningen av barn med utomordentliga prestationsförmågor är *särbegåvade* barn (Persson, 1997). Internationellt stöter vi ofta på synonymerna *begåvning*, *talang* och *särbegåvning* och forskningslitteraturen indikerar också att det är nästan omöjligt att göra en godtagbar distinktion mellan dessa termer (Bloom & Sosniak, 1985; Mönks & Ypenburg, 2009; Ziegler, 2010). På senare år har Ziegler (2010) kompletterat begåvningsbegreppet med formuleringen *excellent prestationsförmåga* för att på så sätt understryka individens förträffliga utvecklingspotential.

Sammanfattningsvis kan vi konstatera att det finns många begåvningsforskare som använder termerna begåvning, talang, särbegåvning och excellent prestationsförmåga som synonymer (Csikszentmihalyi & Robinson, 1986; Mönks & Ypenburg, 2009; Ziegler, 2010). En del forskare gör däremot skillnad mellan *förmågor* och *begåvning* genom att påpeka att förmågan är underordnad begåvning (Haensly, Reynolds, & Nash, 1986) och åter andra tvistar om huruvida det är förmågor eller begåvning som kan likställas med utomordentliga prestationer (Ziegler, 2010).

Begåvningsmodeller

Den varierande terminologin inom forskningsfältet kan delvis förklaras med att man använder olika modeller för att definiera och identifiera begåvning. Härnäst följer en kortfattad beskrivning av de mest använda modellerna.

Färdighetsmodellen

Den äldsta modellen för att identifiera begåvning är *färdighetsmodellen* som grundar sig på *psykometriska* definitioner. Enligt modellen – som har sina rötter i slutet av 1800-talet – är det möjligt att fastställa mentala förmågor i tidig ålder och dessa förmågor påverkas endast marginellt under individens livstid. De mentala förmågorna fastställs med hjälp av *intelligenstest* som resulterar i individens *intelligenskvot* (IQ).

Det första intelligenstestet skapades i Frankrike av Binet (1857-1911) och vidareutvecklades sedan till Stanford-Binet Intelligence Scales, som blev ett av de mest använda psykometriska testerna. Höga resultat på Stanford-Binet testet har traditionellt använts som direkta indikatorer för särbegåvning (Juter & Sriraman, 2011). En av pionjärerna bakom testet var Terman (1877-1956) som två år före sin död medgav att hans studie (som vid den tiden hade pågått i över 30 år) entydigt visade att hög intelligens i tidig ålder inte är en tillräckligt bra indikator för kommande prestationer. De högpresterande individerna var inte bara mycket intelligenta (med en IQ över 135) de var även högt motiverade och deras omgivning hade också en positiv inverkan på dem (Mönks & Ypenburg, 2009).

Från att ha varit allmänt accepterad under större delen av 1900-talet, så har färdighetsmodellen fått utstå hård kritik mot århundradets slut. Ett av problemen beror naturligtvis på att testerna inte kan beskriva en absolut intelligens eftersom testresultaten visar individens relativa IQ i förhållande till jämförelsegruppen. En annan del av kritiken handlar om att modellen utesluter icke-intellektuella faktorer och saknar koppling till individens sociala miljö (Mönks & Ypenburg, 2009).

Ytterligare kritik har sin grund i att man observerat uppenbara svängningar i IQ mellan 6 och 18 års ålder, vilket strider mot uppfattningen att IQ skulle vara stabil under hela livet (Weinert, 1998). Ett annat bekymmer är att den *socioekonomiska* bakgrunden har visat sig vara minst lika viktig inför framtida topprestationer som IQ är. Redan i Termans studie observerades att de särbegåvade visserligen var friskare och i genomsnitt längre än resten av befolkningen men de var precis lika framgångsrika som ett slumpmässigt urval individer med samma socioekonomiska bakgrund (Ziegler, 2010). Dessutom har det visat sig att även inläring påverkar IQ och att den påverkan inte endast är begränsad till tidiga åldrar (Helmke & Weinert, 1997). Ziegler (2010) påpekar att även valet av utbildning påverkar IQ. När elever med samma intelligenskvot valde olika utbildningar, så visade det sig att de elever som valde teoretisk gymnasieutbildning höjde sin IQ med i genomsnitt 11 poäng jämfört med de elever som valde yrkesskola.

Med tanke på den långa raden av problem och dilemman, så är det inte överraskande att flera begåvningsforskare uttalar sig i negativa ordalag när det gäller intelligenskvot och IQ-tester. Mönks påpekar bl.a. att ”varje gång som

begåvning reduceras till IQ fjärmar man sig från verkligheten” (Mönks & Ypenburg, 2009, s.37).

Men trots att det kan uppfattas som en paradox, när det gäller att identifiera begåvning, så det är fortfarande problematiskt att hitta ett välgrundat alternativ till IQ-tester:

... hur frestande det än kan kännas att ersätta det synnerligen föga användbara IQ med prestationer, är det vetenskapligt meningslöst (Ziegler, 2010, s.39).

Flerfaktorsmodeller

Flerfaktorsmodeller är motpoler till den monokausala färdighetsmodellen och har utvecklats – med hjälp av empiri som har sin utgångspunkt i färdighetsmodellens brister – genom att studera individer som har uppvisat utomordentliga prestationer. Om man betraktar psykisk utveckling som en livslång och dynamisk process, så blir interaktionen mellan individuella anlag och social miljö avgörande för individens beteende- och handlingsmotiv (Mönks & Ypenburg, 2009). Enligt den uppfattningen kan inte resultatet av ett IQ-test ensamt förutsäga individens kommande prestationer. Flerfaktorsmodellerna skiljer därför mellan *anlag* (potential och förmågor som individen besitter) och *förverkligade anlag* (den delen av potential och förmågor som omsätts i prestationer) (Mönks & Ypenburg, 2009).

En av de oftast använda flerfaktorsmodellerna är den *triadiska interdependensmodellen* (Mönks & Ypenburg, 2009). Enligt modellen – som är en sociokulturell konstruktion – är särbegåvning och tillhörande förmågor en potential för utomordentliga prestationer. Den potentialen omfattar minst tre personlighetsdrag: höga intellektuella förmågor, kreativitet och motivation. Men modellen poängterar också att det behövs både hög social kompetens och ett välvilligt samspel mellan skola, familj och vänner för att individen till fullo ska kunna förverkliga sina anlag. Mönks höjer ett varningens finger inför den överraskande höga andelen särbegåvade barn som underpresterar, genom att noggrant förklara att deras misslyckanden inte beror på intellektuella faktorer (Mönks & Ypenburg, 2009). En stor del av kritiken mot den triadiska interdependensmodellen grundar sig i faktumet att modellen ännu inte har prövats empiriskt. Ett annat problem är att kreativitet, som är en av modellens grundstenar, varken kan bedömas eller definieras på ett entydigt sätt (Tannenbaum, 1986; Tóth, 2000; Ziegler, 2010).

En annan postmodern flerfaktorsmodell är *aktiotop-modellen*, som tillägnar stor betydelse åt miljöbetingelser genom att framhäva att individen endast kan ”uppnå excellent prestationsförmåga om en mångfald av komponenter på ett sinnrikt sätt griper in i varandra” (Ziegler, 2010, s.61).

Aktiotop-modellen grundar sig i en definition av särbegåvning enligt delfimetoden, som baseras på expertutlåtanden om hur ett barn sannolikt kommer att klara sina studier samt vilka prestationer man kan förvänta sig av den blivande vuxna individen (Ziegler, 2010). Modellen är resultatet av observa-

tioner av individer som har uppnått excellent prestationsförmåga inom något av en rad undersökta områden, däribland matematik, fysik, musik, litteratur och idrott. Ziegler (2010) poängterar att vägen till excellent prestationsförmåga är lång och mödosam och att inläringen måste pågå under minst tio år eller minst 10 000 timmar. Vidare uppmärksammar han vikten av tidig debut och betonar att inläringen efter en viss ålder måste skifta fokus från den lekfulla upplevelsen till en mera målinriktad process, eftersom prestationsförmågan inte stärks av den formen av lustfyllda sysselsättning där man glömmer sig själv i en s.k. flow (Csikszentmihalyi, 1990; Ziegler, 2010).

I sin analys föreslår Ziegler att man bör använda prestationer som prognostiserande verktyg istället för IQ-tester: ”Den bästa prediktorn för prestationer är tidigare prestationer” (Ziegler, 2010, s.38). Centralt för aktiotop-modellen är alltså aktivitet och handlingar. I det perspektivet ses excellent prestationsförmåga som resultatet av individens utökade handlingsrepertoar.

På vilket sätt utvecklas förmågor till expertis?

En studie vars slutsatser till stora delar är i samklang med aktiotop-modellen presenterades 1985 i Chicago (Bloom & Sosniak, 1985). Forskarlaget hade vid det tillfället under fyra år följt och intervjuat 120 experter, dvs. individer som har uppnått excellent prestationsförmåga. Under studien har man även undersökt omgivningens betydelse för experternas utveckling.

Trots att individerna med excellent prestationsförmåga hörde hemma i skilda ämnesområden – musik, matematik, tennis, simning, medicin och bildhuggerkonst – så har man ändå kunnat identifiera några gemensamma framgångsfaktorer. Oavsett vilket område expertisen hörde till, så har inlärningsfasernas hantering, hemmiljöns positiva inverkan och det livslånga lärandet varit centrala komponenter i dess progression. Utan att exakt bestämma de olika fasernas längd, så avgränsades följande tre inlärningsfaser: de tidiga åren (early years), mellanåren (middle years) och de senare åren (later years). Forskarlaget även lyfter fram en särskild förmåga som hjälpte begåvningarna att lyckas väl under de mödosamma mellanåren, nämligen ”the ability to learn rapidly and well” (Bloom & Sosniak, 1985, s.545).

Det intressanta i sammanhanget är att den expertgrupp där man hade svårast att identifiera och särskilja inlärningsfaserna bestod av matematiker. Problemet berodde på att endast en liten del av matematikernas förmågor kunde observeras; forskarlaget har upprepade gånger vittnat om svårigheten i att iakta problemlösande matematiker, eftersom nästan all aktivitet pågick i deras hjärnor. Och framförallt i matematikernas fall noterades att mer av samma sak inte leder till expertis – det som är avgörande är kvalitén på det som individen lär sig och på instruktionerna som den får (Bloom & Sosniak, 1985).

När det gäller livslånga lärandets betydelse, så har man uppmärksammat faktumet att ingen av experterna har uppnått utomordentliga prestationer på

egen hand, både familjen och lärarna hade avgörande betydelse i deras utveckling. Experternas utveckling hade präglats av hårt och målmedvetet arbete som har pågått i minst tio år (Bloom & Sosniak, 1985) – något som mer än 20 år senare bekräftades även av Zieglers (2010) observationer. Men i motsatts till aktiotop-modellen – som gör gällande att den bästa prediktorn för senare prestationer är tidigare prestationer – så påpekar Bloom att det ytterst sällan hände att de mest talangfulla barnen blev experter i vuxen ålder, eftersom det var högst 10 procent av experterna som kunde uppvisa särskilda förmågor redan vid elva-tolv års ålder (Bloom & Sosniak, 1985).

Implikationer för studien

Översikten visar att begåvning och förmågor påverkas av både arv och miljö, men översikten visar framförallt att förmågor är utvecklingsbara (Bloom & Sosniak, 1985). Det förefaller också vara tydligt att varken psykometriska tester eller tidiga prestationer är tillräckligt bra prediktorer för framtida prestationer. Följaktligen kommer jag inte att använda någon av de i översikten behandlade begåvningsmodellerna för att identifiera matematiska förmågor hos de elever som kommer att ingå i denna studie.

När det gäller utvecklingen av de förmågor som leder till goda matematiska prestationer, så är det kvalitén på det som eleven lär sig samt på instruktionerna som eleven får, som är avgörande faktorer i processen (Bloom & Sosniak, 1985; Ziegler, 2010). Följaktligen verkar det vara rimligt att anta att om man kan kartlägga interaktionen mellan de förmågor som är matematiska, så bör man med hjälp av undervisning kunna utveckla dem.

Matematisk förmåga

Matematik

Att definiera matematiken på ett tillfredställande eller enhetligt sätt är en nästintill omöjlig uppgift. Matematiken är en mänsklig tankekonstruktion med en flertusenårig historia och har utvecklats såväl ur praktiska behov som ur naturlig nyfikenhet. Den är en del av den mänskliga kulturen och har i den rollen ofta jämförts med musiken. Men matematiken är framförallt en abstrakt vetenskap för problemlösning och metodutveckling som hämtar sina problem från omvärlden eller människans eget tänkande (Kiselman & Mouwitz, 2008).

Eftersom en matematisk teori alltid gäller under angivna förutsättningar, kan den principiellt inte utsäga något om den fysiska verkligheten (Kiselman & Mouwitz, 2008). Trots det har matematiken under de senaste århundradena varit ett av naturvetenskapens främsta verktyg och är även idag ett viktigt arbetsredskap inom ekonomi och samhällsvetenskap. Matematikens roll i

den internationella kulturen förutsätter en förmåga att kunna kommunicera med hjälp av matematiska symboler och andra representationsformer.

Modellen för hur man argumenterar inom matematiken kan spåras till antiken. Ämnets axiomatiska uppbyggnad medför att den matematiska argumentationen skiljer sig från sättet man argumenterar i vardagen eller i andra vetenskaper. Till exempel är ett matematiskt bevis en logiskt fullständig argumentation som inte lämnar några luckor och inte kan motsägas; tyngdlagen däremot har fastställts efter iakttagelser och empiriska undersökningar, men har inte bevisats och kan aldrig bevisas på samma sätt som man bevisar satsen inom matematiken.

Matematiken strukturerar, axiomatiserar, härleder, bevisar och introducerar nya begrepp med ett språkbruk som ställer höga krav på användaren. I takt med ämnets kvalitativa fördjupning, ökar även kravet på att begreppen definieras med större precision – samtidigt måste användaren uppleva friheten att kunna generalisera sina iakttagna mönster. Det nämnda förhållningssättet formuleras av Tengstrand (2008):

När gränserna vidgas blir det nödvändigt att strikt hålla sig inom den ram som anges av definitionerna. Utan fantasi blir matematiken tråkig och onjutar, men utan stringens blir det endast lös spekulatation (Tengstrand, 2008, s.296).

Likväl är matematiken, med sitt anspråk på abstraktion och exakthet, en outhärlig källa för de samband och regler som utgör dess byggstenar – följaktligen kan även begränsade förkunskaper inom ämnet leda till en meningsfull intellektuell aktivitet (Gyarmathy, 2002).

Matematisk förmåga – förklaringsmodeller

Människan föddes inte med färdiga matematiska förmågor, men en aktiv kontakt med ämnet kan, under gynnsamma förhållanden, leda till att man utvecklar en strukturerad och sammansatt matematisk förmåga (Krutetskii, 1976; Rosca & Zörgö, 1973). I diskussionen om den matematiska förmågan bör vi påminna oss att matematiken inte är ett ämne som kan avgränsas på ett klassiskt sätt med tillräckliga och nödvändiga komponenter, och det finns ingen enhetlig terminologi för de förmågor som vi benämner som matematiska (Csíkos & Dobi, 2001). Följaktligen är det inte heller möjligt att definiera ett strukturerat system för matematisk tänkande där de ingående enheterna är nödvändiga och tillräckliga för att förstå systemet (Sternberg, 1998).

Men icke desto mindre har avgränsningen och kartläggningen av de matematiska förmågorna varit en uppgift som länge har sysselsatt både matematiker och psykologer. En historisk tillbakablick visar att psykologen Thorndike redan i början av 1900-talet hade försökt definiera de matematiska förmågorna, men hans ansträngningar var inte lyckade (Krutetskii, 1976). Det huvudsakliga problemet med Thorndikes arbete var att han, i enlighet med den rådande tidsperiodens anda, som dominerades av psykometriska tester,

såg matematiska förmågor – i likhet med övriga förmågor – som medfödda och endast i liten utsträckning utvecklingsbara under individens livstid. Vidare ansåg han att vissa elever kommer att lyckas väl i ämnet medan andra elever kommer att misslyckas oavsett kvalitén på undervisningen. Kartläggningen av de matematiska förmågorna fortsatte sedan – framförallt i USA och västvärlden – under första halvan av 1900-talet med hjälp av färdighetsmodellen.

Innan jag ifrågasätter färdighetsmodellens lämplighet som instrument i strävan att identifiera matematiska förmågor, bör det påpekas att matematisk begåvning är generellt betraktad som en stark indikator för allmän intelligens (Juter & Sriraman, 2011). För att lättare förstå den anknytningen, kan vi notera att historiskt sett bygger alla IQ-tester på uppgifter vars lösning förutsätter goda matematiska förmågor. Till exempel innehåller Stanford-Binet testet – ett av de mest använda IQ-testerna genom historien – uppgifter som mäter räknekunskaper, sifferminne, förmågan att identifiera talföljder och analys av ritningar som representerar två och tredimensionella figurer (Juter & Sriraman, 2011). Men trots IQ-testernas tydliga matematiska grunder, så har man under 1990-talet – samtidigt som intelligenskvotens roll som prediktor börjat ifrågasättas – börjat ifrågasätta kopplingen mellan matematisk begåvning och intelligens. Som ett led i den trenden visade Helmke och Weinert (1997) att under de första fyra skolåren är tidiga matematikprestationer en bättre prediktor för senare matematikprestationer än vad IQ är. Studien visade också att IQ:s prognoseffekt för matematikprestationer sjunker med nästan 50 procent efter de första fyra skolåren. De svaga sambanden mellan intelligens och matematiska förmågor bekräftas även i studier som observerade äldre elever; varken Furneaux och Rees (1978) eller Vincze (2003) kunde påvisa stark korrelation eller kausalitet mellan intelligens och matematiska förmågor.

Sammanfattningsvis kan man konstatera att trots att IQ-tester ofta premierar individer med goda matematiska förmågor, så verkar det inte finnas tillräckligt starka samband mellan IQ och matematiska prestationer. Att IQ-tester indikerar ett visst samband mellan IQ och matematisk förmåga beror förmodligen på att testerna innehåller många matematikrelaterade testfrågor.

Följaktligen förefaller det relevant att ställa frågan om det finns någon metod som gör det möjligt att kartlägga strukturen av den matematiska förmågan. Och svaret på den frågan är att det mest effektiva sättet att ta reda på vad som ligger bakom den matematiska förmågan är att analysera matematiska problem och individers olika sätt att lösa dem (Krutetskii, 1976; Vincze & Márton, 2004). Analysen av ett givet problem, oavsett vilket matematiskt område det hör till, leder till att man kan härleda strukturen av det matematiska tänkandet som behövs för att lösa problemet – och den som söker svaret på matematikens gåta i problemlösningen är inte långt ifrån sanningen (Halmos, 1981; Polya, 1957).

Den beskrivning av matematisk förmåga som jag kommer att använda som grund till denna studie hämtar jag från den ryske psykologen V. A. Krutetskii som i en longitudinell studie (1955–1966) studerade elevers matematiska förmågor (Krutetskii, 1976). Wistedt (2006) påpekar att Krutetskii

... beskriver matematisk förmåga som en dynamisk och föränderlig potential som vi utvecklar i en matematisk verksamhet där brist i viss förmåga kan kompenseras av styrka i andra förmågor inom vida gränser (Wistedt & Lagergren, 2006).

Enligt Krutetskii är alltså matematisk förmåga ett komplext och dynamiskt begrepp med flera komponenter som utvecklas inom matematiska aktiviteter. Krutetskii kritiserar i sin studie psykometriska testmetoder – som i den tidsperioden var de mest använda metoderna – genom att påpeka att förmågor endast delvis är medfödda; han väljer att definiera arvet som en benägenhet att utveckla en viss kategori förmågor. Den sistnämnda distinktionen innebär till exempel att individens matematiska förmågor endast existerar i samband med matematiska aktiviteter, men det betyder också att den matematiska förmågan även skapas och utvecklas genom matematisk aktivitet (Krutetskii, 1976).

I Krutetskii:s studie ingick ungefär 200 elever mellan 6 och 17 års ålder. Eleverna observerades och intervjuades i samband med att de löste matematiska problem av skiftande karaktär och svårighetsgrad. Forskarna använde 26 olika problemserier med respektive 8-10 problem, där varje serie var konstruerad med syftet att synliggöra olika komponenter av den komplexa matematiska förmågan. Till exempel var syftet med serie nr.13 att eleverna genom problemlösningen ska kunna visa prov på förmågor som: flexibilitet i tänkandet samt en strävan efter klarhet och elegans i lösningar. (*ibid*, s.135-136). På liknande sätt skulle till exempel serie nr.19 klarlägga elevernas förmåga till logiskt tänkande, förmågan att minnas matematisk information och förmågan att förenkla och förkorta resonemanget under problemlösningen (*ibid*, s.148). Analysen av elevernas problemlösning och yttranden i samband med intervjuer ledde till att forskarlaget efter tolv års studier kunde presentera den matematiska förmågans struktur. De komponenter av elevers matematiska förmåga som Krutetskii har identifierat är:

- A. Förmågan att *insamla och formalisera matematisk information*
 - t.ex. förmågan att upptäcka den formella strukturen i ett matematiskt problem.
- B. Förmågan att *bearbeta matematisk information*
 - t.ex. förmågan att tänka logiskt inom områden som representeras av kvantitativa och spatiala samband samt numeriska och algebraiska symboler,
 - förmågan att tänka och uttrycka sig med hjälp av matematiska symboler,

- förmågan att effektivt kunna generalisera samband, räknemetoder och egenskaper hos matematiska objekt,
- förmågan att förkorta matematiska resonemang och tillhörande beräkningar,
- flexibilitet i tänkandet samt en strävan efter klarhet, enkelhet, elegans och rationalitet i lösningar.

C. Förmågan att *minnas matematisk information*

- s.k. matematiskt minne, dvs. ett generaliserat minne för matematiska samband, typiska egenskaper, problemlösningsmetoder samt mentala strukturer för argumentation och bevisföring.

D. Ovanstående förmågor resulterar i en *allmän* och *sammansatt förmåga*, som manifesteras i ett matematiskt sinnelag.

(*ibid*, s.350-351, min översättning)

Forskarlaget noterade att elever med särskild fallenhet för matematik har ovan listade förmågor mer eller mindre välutvecklade och det är det dynamiska samspelet mellan förmågorna – där mindre välutvecklade förmågor kan kompenseras av välutvecklade förmågor – som dessa elever använder i problemlösningsprocessen. I sammanhanget är det viktigt att notera att den sistnämnda komponenten, dvs. den allmänna förmågan, inte kan avgränsas på samma sätt som övriga förmågor. I det fallet handlar det om elever som *matematiserar* världen och tolkar omgivningen med hjälp av logik, siffror och matematiska begrepp. Om en elev med ett välutvecklat matematiskt sinnelag till exempel är intresserad av astronomi, så konstruerar eleven tabeller som innehåller beräkningar med månfaser, rotationstider och avstånd mellan planeter; om eleven är intresserad av geografi, så kommer tabellerna, diagrammen och statistiken innehålla befolkningstäthet, bergshöjd, floders längd och annan kvantifierbar data (*ibid*, s.303). Noteras bör också att den allmänna förmågan var nästintill omöjlig att observera under problemlösningsprocessen, det var framförallt genom intervjuer och informella samtal med elever samt deras föräldrar som den förmågan kunde identifieras av Krutetskiis forskarlag.

Krutetski drar paralleller mellan förmågan att insamla och formalisera matematisk information och det matematiska minnet genom att poängtera att på samma sätt som förmågan att insamla information är generaliserad, förkortad och flexibel, så är det matematiska minnet ett minne för generaliserade, förkortade och flexibla metoder och processer (*ibid*, s.352). Man kan även uttrycka det som att elever med fallenhet för ämnet kommer ihåg problemtyp, problemets karaktär och lösningsmetod, men kan inte minnas siffror och annan kontextuell information som var anknuten till det ursprungliga problemet. Eftersom matematiskt minne intar en centrall roll i denna studie, så kommer jag att ägna nästa avsnitt till att diskutera begreppet mer ingående.

Det bör också påpekas att, trots att de huvudsakliga resultaten från Krutetskii's studie leder till en identifieringsmodell för matematiska begåvningar, så är Krutetskii tydlig med att inte göra en distinktion mellan högpresterande elever (elever som har höga betyg i matematik) och elever med särskild förmåga och fallenhet för ämnet. Han uttrycker detta enligt följande:

Thus, we believe that the question whether abilities for *learning* mathematics can be regarded as a manifestation of mathematical ability in the proper sense of the word should be answered affirmatively (*ibid*, s.69).

Krutetskii listar även andra förmågor som traditionellt uppfattas som matematiska – och är förvisso värdefulla i de sammanhangen – men som inte nödvändigtvis ingår i den sammansatta matematiska förmågan. Dessa förmågor, som ofta förknippas med matematiska aktiviteter, men som enligt Krutetskii (1976) inte inverkar på elevers matematiska förmågor, är: *snabbhet i tanke* (det individuella tempot är inte avgörande för problemlösningsprocessen), *snabbhet och exakthet i beräkningar*, *minne för symboler, formler och tal*, *förmågan att kunna hantera rumsliga begrepp* och *förmågan att visualisera abstrakta matematiska samband* (*ibid*, s.351). I samband med den presenterade listan poängteras att detta endast gäller skolelever och att man efter den genomförda studien inte kan uttala sig om vuxna matematikers bristande förmågor.

Studien differentierar även tre olika typer av matematiskt begåvade elever:

- den *analytiska typen*, som karakteriseras av abstrakta tankestrukturer, en välutvecklat verbal-logiskt uttryckssätt och mindre välutvecklad förmåga att visualisera ämnet,
- den *geometriska typen*, som gärna visualiserar ämnet och är sämre på att uttrycka sig med ett verbal-logiskt uttryckssätt och
- den *harmoniska typen*, som är en kombination av de två ovanstående typerna

(*ibid*, s.327-329, min översättning).

Med studiens resultat i minnet kan man naturligtvis fråga sig hur pass accepterat Krutetskii's synsätt är i forskningsfältet som studerar matematiska förmågor. Svaret på den frågan är att, i skrivande stund (hösten 2012), didaktiska forskare är tämligen överens om att Krutetskii's modell gäller och är fortfarande användbar. Den israeliska forskaren Leikin (2012) formulerade detta på följande sätt under det avslutande seminariet för ICME 12, där aktuell forskning om elever med särskild fallenhet och förmåga i matematik diskuterades:

Vet vi mer idag om matematiska förmågor jämfört med vad Krutetskii visste för nästan 50 år sedan? Jag tror att vi är överens om att vi inte gör det. (Leikin, 2012; min översättning).

I ett försök att differentiera Leikins förenklade svar på problematiken, så bör det noteras att under början av 2000-talet har flera intressanta studier genomförts med ambitionen att identifiera matematiska förmågor och kompetenser. Bland de viktigaste kan nämnas Sheffield's (2003) studie där lovande (promissing) elever observerades bl.a. under matematisk problemlösning. De utmärkande karaktärsdragen hos dessa elever är:

Matematiskt sinnelag:

1. Älskar att utforska mönster och pussel.
2. Ser matematik och struktur i olika situationer.
3. Känner igen, skapar och utvidgar mönster.
4. Organiserar och kategoriserar information.
5. Har en djup förståelse för enkla matematiska begrepp, inklusive en välutvecklad taluppfattning.

Matematisk formalisering och generalisering:

1. Generaliserar strukturen av ett problem, ofta efter endast ett fåtal exempel.
2. Använder ett, till problemet, anpassat resonemang.
3. Tänker logiskt och symboliskt med hjälp av kvantitativa och rumsliga samband.
4. Utvecklar *bevis* och andra övertygande *argument*.

Matematisk kreativitet:

1. Bearbetar matematisk information flexibelt – växlar från beräkningar till visuella och grafiska representationer.
2. Vänder på tankegångar – kan växla från direkta till omvända angreppssätt.
3. Har genuina metoder för problemlösning – löser problem på sitt eget sätt, med hjälp av ovanliga metoder.
4. Strävar efter matematisk elegans och tydlighet i sitt resonemang.

Matematisk nyfikenhet och uthållighet:

1. Är nyfiken på matematiska samband och relationer – undrar "varför" och "tänk om".
2. Har energi och uthållighet vid lösning av svåra problem.
3. Söker bortom problemets ytliga drag och fortsätter att utforska även efter att det ursprungliga problemet är löst.

(*ibid*, s.3-4, min översättning)

Det är relativt enkelt att se de många och viktiga likheterna mellan Sheffields och Krutetskiis empiriskt framtagna modeller, vilket bekräftar antagandet att Krutetskiis modell är användbar i det mödosamma arbetet som är förknippat med kartläggningen av den matematiska förmågan. Vidare understryker Sheffield – i likhet med Krutetskii – att snabbhet och noggrannhet vid beräkningar, minne för exakta formler och fakta samt rumslig begåvning inte är nödvändiga komponenter bland dessa elevers karaktärsdrag (Sheffield, 2003, s.4).

I en nyligen publicerad forskningsöversikt över matematisk begåvning och kreativitet konstaterar Juter och Sriraman (2011) att – när det gäller den matematiska förmågens struktur – har även kognitiva studier kommit fram till liknande resultat som Krutetskii. De nämner, i sin tur, följande förmågor som komponenter i den sammansatta matematiska förmågan: (1) förmågan att *abstrahera*, *generalisera* och *urskilja* matematiska strukturer, (2) *informationsbearbetning*, (3) *logiskt tänkande* och *slutledningsförmåga*, (4) *analogt* och *heuristiskt tänkande*, (5) *flexibilitet* och *reversibilitet* i matematiska beräkningar, (6) *intuitiv känsla* för matematiska bevis, (7) förmågan att *på egen hand upptäcka* matematiska regler, (8) att kunna *ta beslut* vid problemlösning, (9) förmågan att *visualisera* problem och relationer och (10) kunna *göra skillnad* mellan *teoretiska* och *empiriska* principer (Juter & Sriraman, 2011, s.49-50).

Noteras bör också att relativt nyligen har två svenska studier publicerats inom området (Dahl, 2011; Pettersson, 2011); båda forskarna utgick från Krutetskiis (1976) modell för matematiska förmågor och visar att modellen kan användas framgångsrikt i vetenskapliga undersökningar. Pettersson (2011) undersökte möjligheten att identifiera elever med särskilda matematiska förmågor och studiesituationen för dessa elever medan Dahl (2011) undersökte vilka matematiska förmågor elever visar prov på under problemlösning.

Sammanfattningsvis kan man konstatera att det verkar råda samstämmighet inom forskningsområdet att Krutetskiis modell är användbar och har hög validitet (Gyarmathy, 2002; Juter & Sriraman, 2011; Vincze, 2003; Vincze & Márton, 2004) och följaktligen kan modellen utgöra en meningsfull grund för mina studier.

Slutligen vill jag nämna ett projekt, som har haft stor inverkan på utformningen av den, i skrivande stund (hösten 2012), gällande svenska ämnesplanen i matematik: ett danskt projekt som presenterade en samling *kompetenser* som kan förknippas med skolans matematiska aktiviteter (Niss & Højgaard-Jensen, 2002). Forskarlaget, som leddes av Niss, kom fram till att åtta olika kompetenser behövs för att kunna prestera väl inom skolmatematiken: *tankegångskompetens*, *problembehandlingskompetens*, *symbol- och formalismkompetens*, *kommunikationskompetens*, *modelleringskompetens*, *resonemangskompetens*, *representationskompetens* och *hjälpmedelskompetens*. I sammanhanget är det viktigt att uppmärksamma att det danska projektet

resulterade i en beskrivning av matematiska kompetenser som inte riktigt kan likställas med matematiska förmågor.

Niss beskrivning av matematiska kompetenser har tjänat som grund till den nyligen genomförda ämnesplansreformen i matematik i den svenska gymnasieskolan (Skolverket, 2011c). I den svenska ämnesplanen har Niss kompetenser lett till följande formuleringar om matematiska förmågor i en målstyrd skola:

Undervisningen i ämnet matematik ska ge eleverna förutsättningar att utveckla förmåga att:

- använda och beskriva innebörden av matematiska begrepp samt samband mellan begreppen.
- hantera procedurer och lösa uppgifter av standardkaraktär utan och med verktyg.
- formulera, analysera och lösa matematiska problem samt värdera valda strategier, metoder och resultat.
- tolka en realistisk situation och utforma en matematisk modell samt använda och utvärdera en modells egenskaper och begränsningar.
- följa, föra och bedöma matematiska resonemang.
- kommunicera matematiska tankegångar muntligt, skriftligt och i handling.
- relatera matematiken till dess betydelse och användning inom andra ämnen, i ett yrkesmässigt, samhälleligt och historiskt sammanhang.

(Utbildningsdepartementet, 2010, s.87-88)

I samma text nämns det också att ”undervisningen ska stärka elevernas tilltro till sin förmåga att använda matematik i olika sammanhang” (Utbildningsdepartementet, 2010, s.87-88). Med hjälp ovanstående exemplifieringar kan vi konstatera att begreppet förmåga i den svenska ämnesplanen är nära relaterad till begreppet kompetens enligt Niss (2002). Följaktligen kan inte de kompetenser som i ämnesplanen (2011) benämns ”förmågor” utgöra en lika entydig grund för mina studier som Krutetskiis (1976) definition av matematiska förmågor. Resonemanget får tjäna som ytterligare ett argument till att jag i denna studie väljer att undersöka matematiska förmågor enligt Krutetskiis definitioner.

Implikationer för studien

Översikten visar att matematiska förmågor – i likhet med övriga mänskliga förmågor – endast delvis är medfödda, men den visar framförallt att dessa förmågor är utvecklingsbara. I den bemärkelsen kan inte psykometriska tester tjäna som metod för att identifiera matematiska förmågor. Men inte heller tidiga matematikprestationer är tillräckligt bra indikatorer för senare matematiska prestationer. Det leder till att jag varken kommer att använda

psykometriska tester eller undersöka tidigare matematikprestationer hos eleverna som deltar i denna studie.

Översikten visar också att Krutetskiis definition av matematisk förmåga konstituerar en sammansatt och föränderlig struktur av flera förmågor som interagerar och utvecklas inom en matematisk verksamhet. Studier som undersöker strukturen bakom den matematiska förmågan använder problemlösning som matematisk aktivitet under observationerna. Detta leder till att jag kommer att använda problemlösning som matematisk aktivitet – följaktligen kommer jag att observera elever i samband med problemlösningsprocessen. I sammanhanget blev det också tydligt att den *allmänna matematiska förmågan*, som bl.a. manifesteras i ett matematiskt sinnelag, inte kan observeras och avgränsas under problemlösningsprocessen – därför väljer jag att inte undersöka den allmänna matematiska förmågens förekomst.

Krutetskiis studier visar att det finns en komponent i den sammansatta matematiska förmågan som har identifierats som *matematiskt minne* och att den förmågan är observerbar under problemlösningsprocessen. Vidare kan jag konstatera att Krutetskiis modell av den matematiska förmågan används fortfarande – nästan 50 år efter sin publicering – framgångsrikt i nya studier inom området (Dahl, 2011; Pettersson, 2011). Min slutsats blir därmed att modellen kan utgöra en meningsfull grund för mina studier. Följaktligen kommer jag i denna studie huvudsakligen att undersöka förekomsten av och interaktionen mellan följande tre komponenter av den matematiska förmågan:

- förmågan att *insamla och formalisera matematisk information*,
- förmågan att *bearbeta matematisk information* och
- förmågan att *minnas matematisk information*.

Matematiskt minne

För att på ett bättre sätt klargöra minnets inverkan på elevers matematiska aktiviteter, ska jag i detta avsnitt belysa problematiken från två olika perspektiv: jag kommer dels att redogöra för hur det matematiska minnet manifesteras i samband med matematiska aktiviteter, dels för hur det matematiska minnet samspelar med våra biologiska och kognitiva funktioner.

Att observera lärares matematikundervisning och elever i klassrumsmiljö är bortom syftet med denna studie, men eftersom jag vill undersöka elevers matematiska förmågor i allmänhet och det matematiska minnets roll i synnerhet, tror jag att det kan vara meningsfullt att i sammanhanget nämna några aspekter av lärares uppfattning om minnets roll i samband med matematiska aktiviteter.

Matematiklärare har ofta framfört att det är mycket viktigare att behärska kvalitativ problemlösning än inlärd och automatiskt utförda procedurer (Byers & Erlwanger, 1985). Lärare har traditionellt betraktat förståelse som motpol till memorering av matematisk information, där det senare fenomenet anses likna ett förråd av regler och faktakunskaper som hålls ihop av lösa samband – följaktligen uppfattar lärare i allmänhet att memorering leder till att innehållet antingen glöms bort eller blir ihågkommet på ett felaktigt sätt (Byers & Erlwanger, 1985).

I en studie från 2004 (Vincze & Márton, 2004) uppskattade matematiklärare – som undervisade elever i alla stadier från grundskola till universitet – komponenterna i den matematiska förmågan enligt följande rangordning, den viktigaste förmågan kommer först:

1. intellekt,
2. kreativitet,
3. uthållighet i samband problemlösning,
4. specifika mentala egenskaper och
5. allmänna personlighetsdrag.

Det mest intressanta i sammanhanget är förstås att matematiklärare, enligt dessa studier, inte anser att minnet är en nödvändig komponent av den matematiska förmågan. Och i så fall kan man naturligtvis fråga sig varför man bör studera minnesfunktioner i samband med matematiska aktiviteter och på vilket sätt dessa funktioner kan knytas till lärandet.

Ett delsvar på den frågeställningen är att oavsett vilka kognitiva processer som påverkar och utvecklar den matematiska förmågan, så är lärandet utan tvivel en av dem – själva ordet matematik kan etymologiskt härledas till adjektivet *mathematikos* ”benägen att lära” och verbet *mathematein* ”att lära”. Eftersom ett viktigt resultat av lärandeprocessen är kunskap som bevaras i minnet och kan användas vid behov, så har vi god anledning att tro att minnesfunktionerna påverkar utvecklingen av den matematiska förmågan.

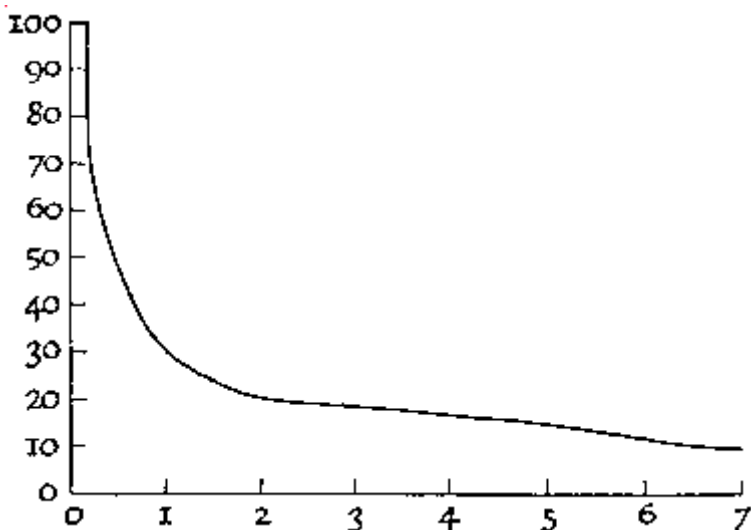
Filosofen och kognitionsvetaren Gärdenfors (2010) uttrycker sambandet mellan minne och lärande på följande sätt:

Lärande och minne är två sidor av samma mynt. Utan minne skulle det inte vara mycket bevänt med vårt lärande. Och omvänt, utan lärande skulle vi inte behöva något minne. Om man skall förstå villkoren för hur människan lär sig blir det därför viktigt att känna till hur vårt minne fungerar och vad vi kan göra för att minnas bättre. (Gärdenfors, 2010, s.46-47)

Att memorera siffror

För att få förståelse för hur minnesfunktioner uppfattas i samband med matematiska aktiviteter ur ett psykologiskt perspektiv, så följer härnäst en kort översikt av området.

Minnets roll har traditionellt behandlats med fokus på dess *kvantitet* respektive *kvalitet*. Forskning som handlar om minnesfunktioner har genomförts under mer än 120 år, men under de första 75 åren har studierna nästan uteslutande undersökt minnet med anseende på mängden ihågkommen information, dvs. man sökte *kvantitativa* mått på informationen som kunde återkallas ur minnet. En milsten och likväl pionjär bland dessa studier, som skapade en tradition i ämnet, är Ebbinghaus undersökning från 1885 om hur ord som saknar mening (nonsense syllables) lagras i minnet och på vilket sätt den informationen kan återskapas (Byers & Erlwanger, 1985). Ebbinghaus uppmanade studenter att memorera ungefär 50 meningslösa uttryck som t.ex. *foh*, *kah*, *pu*, osv. Sedan testade han studenterna för att se hur många av dessa uttryck de kunde komma ihåg efter bestämda tidsperioder. Resultatet av studien blev känt som *Ebbinghaus glömskekurva* och visas i följande graf.



Figur 1

Ebbinghaus glömskekurva. På den vågräta axeln visas antalet dagar som har gått och på den lodräta axeln visas andelen ihågkomna ord uttryckt i procent. (Rohracher, 1947, s. 247)

Grafen visar dels att efter några timmar var mer än 40 procent av den meningslösa informationen bortglömd, dels att andelen information som kunde återkallas ur minnet därefter fortsatte att minska i något långsammare takt. Senare undersökningar visade att även meningsfull information, som t.ex. berättelser eller dikter, glömdes bort enligt en liknande kurva – samtidigt noterades att andelen memorerad meningsfull information var mycket större än motsvarande andel meningslös information. Efter liknande undersökning-

är observerades dessutom att det tar ett år att glömma en lika stor andel av innehållet i en akademisk kurs som andelen meningslös information som glöms bort efter en dag (Hilgard & Atkinson, 1957).

Studier som presenterades fram till 1960-talet bekräftade den rådande allmänna uppfattningen att inläring framförallt främjas av upprepning, övning och repetition (Morgan & Deese, 1957). I sammanhanget poängterar Woodworth och Schlossberg (1954) återigen det som studierna var överens om: kunskap som man önskar behålla under en lång tidsperiod bör studeras om och om igen. Med tanke på utgångspunkterna för den tidens studier, så är det inte överraskande att diskussionen om minnets roll i matematiken har, under flera decennier, till övervägande del har handlat om minnets kvantitativa egenskaper (Byers & Erlwanger, 1985).

Som kontrast till det kvantitativa angreppssättet, började man inom psykologin redan under 1940-talet att studera minnets roll i matematiken från nya infallsvinklar. Fokus flyttades från de kvantitativa aspekterna av den ihågkomna informationen till *kvalitativa* termer, såsom informationens *sammanhang* och dess *betydelse*.

För att exemplifiera detta, vill jag nämna Katonas undersökning från 1940 i USA, där individer delades in i tre olika grupper med syftet att memorera följande talföljd (Marton, Dahlgren, Svensson, & Säljö, 1999):

5 8 1 2 1 5 1 9 2 2 2 6

Den första gruppens uppgift var att memorera talen genom att upprepa dem i grupper innehållande tre siffror, dvs. 581, 215, 192 osv. Den andra gruppen fick siffrorna presenterade i följande sammanhang:

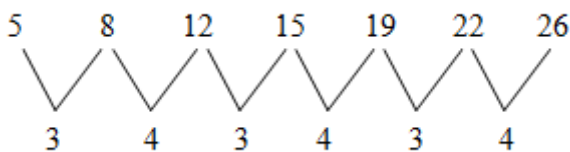
De federala utgifterna uppgick förra året till 5 812 151 922,26 dollar. (Marton et al., 1999, s.28)

Den tredje gruppen skulle under en period av 3 minuter upptäcka ett samband mellan talen och därefter memorera talföljden.

Ett minnestest som genomfördes en kort tid efteråt visade att ungefär en tredjedel av den första gruppens deltagare återgav talföljden på ett korrekt sätt. Fyra av fem individer i den andra gruppen mindes att utgifterna översteg 5 miljarder 810 miljarder dollar – men det var nästan ingen i den gruppen kunde återge den korrekta talföljden. Forskarna konstaterade att den andra gruppens resultat var kvalitativt överlägset och på så sätt visade studien att det var lättare att komma ihåg siffror som hörde till ett sammanhang än att memorera siffror genom upprepning.

Den största skillnaden mellan grupperna observerades först efter några veckor: en fjärdedel av personerna i gruppen som sökte samband mellan talen (den tredje gruppen) kunde fortfarande återge talföljden på ett korrekt sätt, medan ingen i de övriga två grupperna klarade det (Marton et al., 1999). En förklaring till den stora skillnaden är att några av individerna som sökte

samband mellan talen upptäckte en regel som beskrev talföljden, dvs. det första talet från vänster adderas med 3, summan adderas med 4 och sedan ökar summorna växelvis med 3 och 4.



Följaktligen kunde dessa personer återskapa talföljden med hjälp av en enda regel. Efter fyra veckor kom tre av fem individer i den tredje gruppen ihåg att principen var att addera alternativt 3 och 4, men det var endast en person som kom ihåg att det första talet var 5. Exemplet illustrerar den kvalitativa skillnaden mellan mekanisk memorering av siffror genom gruppering, memorering av siffror som har placerats i ett sammanhang och rekonstruktion av siffror enligt en viss princip (Marton et al., 1999).

Genom att koppla resultaten från Katonas undersökning till Ebbinghauskurvan påpekar Osgood (1953) att det är mycket enklare att komma ihåg en regel än 12 siffror, dvs. att information som anknyter till en metod och är baserad på förståelse är lättare att minnas. Det intressanta är att Bruner (1962), som var förespråkare för en mera strukturbaserad inläring, kunde notera liknande resultat efter sina studier. Han kom fram till att *detaljerade kunskaper* lagras i minnet genom *enkla representationer* som har ett regenerativt syfte, dvs. detaljerad kunskap kan återskapas med hjälp av representationer eftersom det finns en *relation* mellan dem.

Det verkar vara uppenbart att det är lättare att komma ihåg ett matematiskt samband som man har förståelse för än att memorera siffror, trots att siffror är ett grundläggande verktyg inom matematiken. Och Krutetskii (1976) var också tydlig med att påpeka att varken sifferminne eller memorering av algorithmer kan likställas med det matematiska minnet.

Matematiskt minne enligt Krutetskii

Härnäst kommer jag att presentera en översikt av utvecklingen av den komponent i den komplexa matematiska förmågan som Krutetskii (1976) identifierade som *matematiskt minne*.

En historisk tillbakablick över studierna i ämnet visar att det inledningsvis fanns två tydliga forskningsinriktningar. Under första halvan av 1900-talet har man studerat minnesfunktioner i samband med matematikkunskaper i ljuset av den intuitiva utgångspunkten att *kunskap* är liktydigt med *förståelse* – under andra halvan av 1900-talet har man däremot försökt att differentiera de två begreppen (Byers & Erlwanger, 1985). Den intuitiva utgångspunkten – att jämföra kunskap med förståelse – ledde till att när man studerade förmågan att minnas siffror, så betraktades även sifferminne som en form av

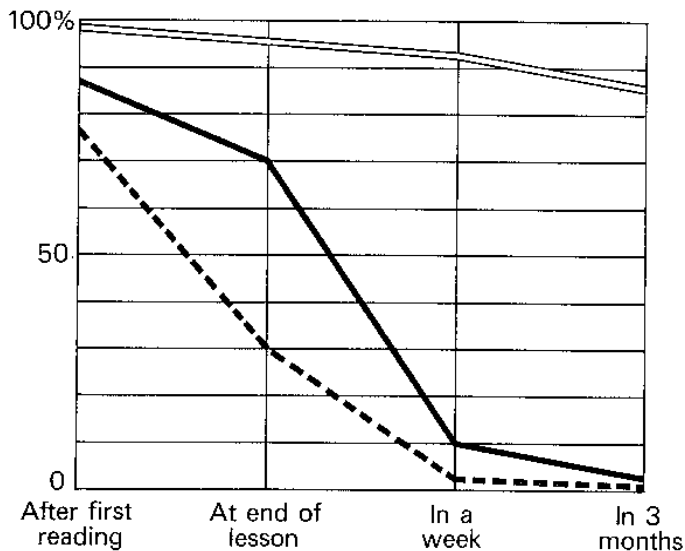
förståelse (Flavell, 1977). Bruner (1973) menade därutöver att distinktionen mellan förståelse och mekaniskt memorerade kunskaper är nästintill meningslös, eftersom minnets betydelse är uppenbar inom varje matematisk aktivitet. Han påpekar också att diskussionen inte bör handla om huruvida minnet är viktigt i samband med förståelse, istället ska man undersöka *vad* som memoreras och *hur* detta är ihågkommet av dem som har en välutvecklad matematisk förmåga, samt även av dem som inte har det.

Även om flera studier följde den intuitiva utgångspunkten, så började resultaten differentieras när observationer visade att *förståelsen är beroende av kunskapens karaktär*, dvs. det finns en viss skillnad mellan förmågor som att kunna generalisera lösningsmetoder, att använda procedurer och att ha kunskap om och att minnas siffror (Davis, 1978).

I motsats till den intuitiva uppfattningen, har flertalet studier som genomfördes under 1960-talet visat att det finns betydande *kvalitativa* skillnader mellan förståelse och kunskap, där *förståelse* konsekvent placeras på en kvalitativt högre nivå än *kunskap*. En studie som exemplifierar det resonemanget presenterades av R. M. Gagné (1970) som beskriver *förståelse* som en samling av *intellektuella färdigheter*. Han påpekar också att man inte kan studera lärandeprocessen utan att samtidigt studera förmågan att minnas. I sammanhanget poängterar han att det finns en kvalitativ skillnad mellan förmågan att komma ihåg en bild, förmågan att minnas en berättelse och förmågan att återaktualisera intellektuella färdigheter, eftersom avvikelserna mellan de nämnda förmågorna återspeglar skillnader i de tillhörande enheternas organisation i minnet (Gagné, 1970).

Väl medveten om att begreppet *förståelse* inte kan tolkas entydigt, differentierar Skemp (1976) begreppets innebörd med hjälp av två olika attribut: *procedurbaserad* förståelse (instrumental understanding) och *relationsbaserad* förståelse (relational understanding). Med hjälp av uttrycket *procedurbaserad* förståelse beskriver han en sorts förståelse som är kopplad till utförandet av olika matematiska procedurer som t.ex. användning av algoritmer och hantering av formler vid lösning av ett givet matematiskt problem. Relationsbaserad förståelse är däremot resultatet av en kartläggning av det matematiska området som det givna problemet hör till, dvs. att individen har goda kunskaper om hur formler och samband relaterar till varandra inom det aktuella området. Genom att använda analogi i uttryckssättet, menar Skemp också att elever bör lära sig matematiken relationsbaserat, eftersom det leder till en djupare förståelse och därmed bättre resultat än den procedurbaserade inläringen (Skemp, 1976).

För att ytterligare understryka den positiva effekten av *relationsbaserade* kunskaper, kan vi jämföra Ebbinghaus glömskekurva med Krutetskiis (1976) diagram (figur 2) som beskriver hur elever med särskild förmåga och fallenhet för ämnet memorerade de olika aspekterna av de lösta problemen.



Figur 2

Grafen visar hur elever med särskild förmåga och fallenhet för ämnet kommer ihåg information knuten till matematiska problem. Den översta kurvan visar andelen ihågkommen generaliserade samband, kurvan som ligger i mitten visar andelen ihågkomna konkret information och den streckade kurvan visar andelen för problemet överflödiga information efter respektive tidsintervall (Krutetskii, 1976, s.297).

Diagrammet visar att förmågan att komma ihåg för problemet överflödiga information liknar Ebbinghaus illustration av hur meningslös information är ihågkommen. Vid problemlösning visade dessa elever prov på *periodiska associationer*, dvs. konkret information som knöt an till problemet memorerades endast under lösningsprocessen och glömdes bort oftast direkt efteråt (*ibid*, s.295). Även överflödiga information i uppgiftstexten sorterades bort omgående – däremot kunde de även lång tid efter problemlösningen minnas den generella metoden som behövdes för att lösa problemet. I sammanhanget påpekar Krutetskii att lågpresterande elever kunde komma ihåg exakta siffror och problemets kontext, men ytterst sällan metoden som ledde till problemets lösning.

För att exemplifiera ovanstående observationer, kan jag nämna fallet där eleverna löste en uppgift som handlade om att beräkna vikten av en fisk och där olika delar av fisken var viktbestämda. De lågpresterande eleverna minskades inte hur man löste problemet (som de hade svårigheter i att lösa) men kunde minnas att de löste ”någonting som handlade om en fisk som vägde 2 pod (ryska viktenhet)” (*ibid*, s.299, min översättning).

Högpresterande elever kunde inte komma ihåg konkreta fakta om fisken, men de minskades mycket väl problemtypen och tillhörande lösningsmetod:

Jag löste en uppgift med olika kombinationer av det hela och delarna – i uppgiften vägde fiskens bakre del och huvudet så mycket, fiskens huvud och bål så mycket och fiskens bakre del och bål så mycket. (*ibid*, s.299, min översättning)

Man kan också notera att Krutetskiis (1976) resultat bekräftar antagandet att en effektiv användning av minnesfunktioner i samband med en matematisk aktivitet, dvs. förmågan som identifieras som *matematiskt minne*, betyder att det som är meningsfullt i sammanhanget (lösningsmetoder och annan generaliserad information) lagras i minnet, medan det meningslösa (siffror och specifik kontext) glöms bort. Studien visar vidare att det matematiska minnet är ständigt närvarande och har en ytterst viktig funktion vid den inledande fasen i problemlösningen, dvs. vid kartläggning av matematisk information – det *matematiska minnet* är en bestående del i förmågan att *insamla matematisk information*, dvs. när individen upptäcker den formella strukturen i ett matematiskt problem.

Krutetskiis beskrivning av det matematiska minnet är delvis resultatet av tolv års observationer av cirka 200 elever i samband med problemlösningssprocessen och delvis resultatet av jämförelser mellan högpresterande och lågpresterande elevers minneshantering. I det avseendet är det inte överraskande att jämförelserna leder till att forskarlaget understryker att det matematiska minnet är mer välutvecklat och är lättare att identifiera hos elever med särskild förmåga och fallenhet för ämnet än hos lågpresterande elever (*ibid*, s.295-301). Vidare menar Krutetskii att det matematiska minnet är resultatet av minnesfunktioner som har utvecklats i samband med matematisk aktivitet och en förmåga som är utmärkande för elever med särskild förmåga och fallenhet för ämnet. Han uttrycker detta som att

... the memory of mathematically able pupil is markedly selective: the brain retains not all of the mathematical information that enters it, but primarily that which is "refined" of concrete data and which represents generalized and curtailed structures. This is the most convenient and economical method of retaining mathematical information. (*ibid*, s.300)

I sammanhanget är det också viktigt att komma ihåg att forskarlaget är tydligt med att *inte* göra distinktion mellan *högpresterande elever* och *elever med särskild förmåga och fallenhet* för ämnet; de anser att dessa elever utgör ungefär samma elevkategori inom skolmatematiken (*ibid*, s.69).

När det gäller det matematiska minnets roll som ett minne för generaliseringar, poängterar Krutetskii att de matematiska förmågorna yttar sig i förmågor som använder matematiskt material för att skapa generaliserade, dvs. matematiska, minnen:

... mathematical abilities are abilities to use mathematical material to form generalized, curtailed, flexible, and reversible associations and systems of them. (*ibid*, s.352)

I en avslutande analys av studiens resultat noteras även att det matematiska minnet är beroende av elevers ålder. I det avseendet konstateras att denna förmåga inte är välutvecklad hos barn i de tidiga skolåren, dvs. till och med barn med fallenhet för ämnet minns generella samband och konkret information lika väl.

In the primary grades we observed no manifestations of mathematical memory proper in his developed forms (when only generalizations and mental patterns would be remembered). At this age, able pupils, according to Dubrovina's observations, usually remembered both concrete data and relationships equally well. The general and the particular, the relevant and the irrelevant, the necessary and the unnecessary are retained side by side in their memories. (*ibid*, s.339)

I kontrast till elever i de tidiga skolåren, visade högpresterande gymnasieelever (upper-grade pupils) prov på ett välutvecklat matematiskt minne. I ett försök att förklara företeelsen, sökte forskarlaget samband mellan de olika matematiska förmågornas utveckling med avseende på elevers ålder. Man antog att det matematiska minnet utvecklas efter att eleven har utvecklat förmågan att generalisera samband, räknemetoder och egenskaper hos matematiska objekt – dvs. det matematiska minnet är resultatet av tidigare generaliseringar. Krutetskii formulerar detta på följande sätt:

The ability to curtail reasoning, the generalizing memory, ... were formed at later stages. There is reason to believe that these components of mathematical abilities are formed on the basis of the initial ability to generalize mathematical material. (*ibid*, s.341)

Redan 1945 visade Polya (1957) att när man löser nya och komplexa matematiska problem, så är det nödvändigt att någon gång under processen få en insikt som leder till att problemet kan lösas, dvs. att man finner en matematisk modell som beskriver lösningen. Krutetskii's observationer visade till en början att insikten som leder till lösning oftast dyker upp efter en rad resultatlösa försök och har till synes ingen koppling till de tidigare försöken. Efter intervjuer och noggrannare analys kunde forskarlaget dock se skillnad mellan insikter som var baserade på tidigare erfarenheter och insikter som tillkom efter rena gissningar. Studien kunde också visa att insikten och inspirationen ofta var resultatet av tidigare generaliseringar – matematiska minnen – som inte ens examinatorn la märke till vid observationstillfället. Vid lösning av nya problem ville dessa elever oftast minnas ett liknande problem som de redan löst; men även när de inte hade behandlat liknande problem förut, så kunde de uppleva att de tidigare hade "löst" problemet (Krutetskii, 1976).

Implikationer för studien

Enligt Krutetskii hör elever med särskild förmåga och fallenhet för ämnet samt högpresterande elever till samma elevkategori inom skolmatematiken.

Att identifiera elever med särskild förmåga och fallenhet för ämnet är en tidskrävande process (Pettersson, 2011) medan högpresterande elever relativt enkelt kan identifieras med hjälp av deras betyg i matematik. Eftersom syftet med denna studie inte är att identifiera elever med särskild förmåga och fallenhet för ämnet, så väljer jag att observera högpresterande elever.

Översikten visar att det matematiska minnet är resultatet av tidigare generaliseringar och därmed inte liktydigt med ett minne för siffror, algoritmer och hantering av formler – följaktligen kommer jag att vara uppmärksam på att differentiera elevernas olika sorters minnen, såsom mekaniska och matematiska minnen, under mina observationer.

Krutetskii påpekar att individer använder matematiskt material för att skapa matematiska minnen och att generaliseringen kan pågå även under lösningen av ett matematiskt problem. Följaktligen kommer jag att undersöka om *förmågan att generalisera matematiska samband* – som är en komponent i förmågan att bearbeta matematisk information – kan identifieras under problemlösningen. På så sätt sätter jag fokus på den enskilda komponenten av den matematiska förmågan som är närmast relaterad till det matematiska minnet.

Krutetskii noterar att elever i de tidiga skolåren inte har ett välutvecklat matematiskt minne, dessa elever kommer lika väl ihåg generella samband som fakta; däremot visade högpresterande gymnasieelever prov på ett välutvecklat matematiskt minne. Eftersom kartläggningen av det matematiska minnet intar en central roll i denna studie, så väljer jag att observera äldre elever som är högpresterande, dvs. högpresterande gymnasieelever. På det sättet har jag större möjlighet att observera och kartlägga det matematiska minnets roll under problemlösningsprocessen.

Översikten visar också att under elevens pågående problemlösningsprocess hade forskarlaget svårigheter att upptäcka skillnaden mellan insikter baserade på tidigare erfarenheter och insikter som tillkom efter rena gissningar. Det krävdes noggranna analyser av intervjuer och skriftliga lösningar för att klargöra insikterna som vittnade om det matematiska minnets närvaro under problemlösningen. I sammanhanget noterades att det matematiska minnet har en viktig funktion vid den inledande fasen i problemlösningen och att det är en bestående del i förmågan att *insamla matematisk information*. Följaktligen kommer jag att noggrant dokumentera elevers skriftliga och muntliga problemlösning dessutom kommer jag att intervjua eleverna i direkt anslutning till problemlösningen. Under analysen kommer jag att vara uppmärksam på om och på vilket sätt det matematiska minnet har en avgörande roll i elevers förmåga att insamla matematisk information.

Kognitiva och biologiska modeller för minneshantering

Matematikens närvaro i minnet

För att bättre förstå hur det matematiska minnet fungerar, bör vi bekanta oss med de kognitiva teorierna och biologin bakom minnesfunktionerna. I det perspektivet kan en studie som genomfördes av Furlong (1951) tjäna som en intressant utgångspunkt. I studiens analysdel konstateras att det är en väsentlig skillnad mellan att minnas om man har postat ett brev jämfört med att komma ihåg värdet av $\sqrt{2}$.

I det första fallet återkopplar intellektet till något som har hänt: vi erinrar, minns och sammanfattar; en visualisering äger rum. I det andra fallet saknas denna återkoppling och det finns inget eller mycket lite visualisering. Det enda vi gör är att komma ihåg en viss information. Det finns återkallelse men inget tillbakablickande. (Furlong, 1951, s.6, min översättning)

Det är förstås uppenbart att matematiker och matematiklärare inte delar Furlongs syn på informationen som är kopplad till $\sqrt{2}$, eftersom dessa yrkesgrupper har både fler och mer konkreta minnen av att hantera talet $\sqrt{2}$. Distinktionen som Furlong noterade handlar däremot om att skilja mellan två olika typer av minnen: *episodiska* respektive *semantiska minnen* (Nyberg & Bäckman, 2009). När Furlong försökte komma ihåg hur han postade brevet, så kunde han erinra sig en tidigare upplevd händelse, dvs. en upplevd episod av livet, som visualiserades med hjälp av minnesfunktioner. I motsats till detta, var närmevärdet för $\sqrt{2}$ bevarat endast som faktum och i minnet frikopplat från avgränsande händelser.

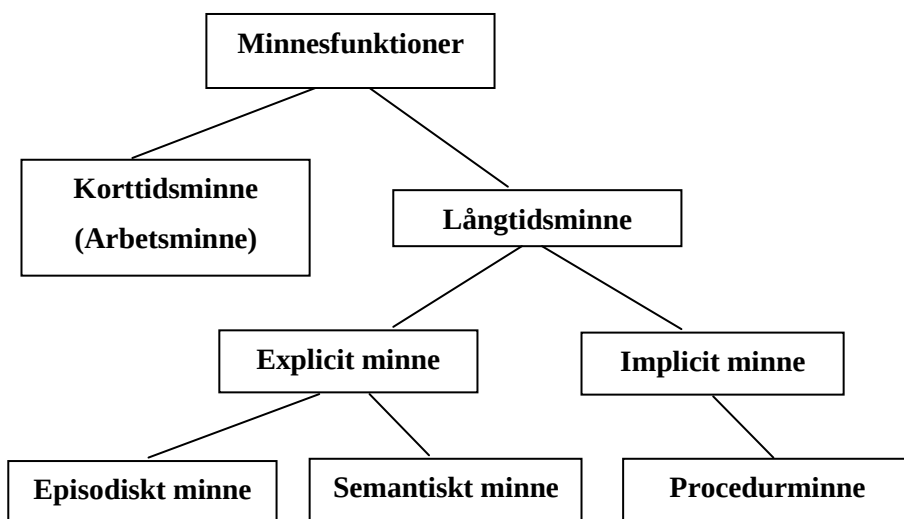
Skillnaden mellan att memorera enheter och att kunna visualisera information med hjälp av minnet leder till en frågeställning som relaterar till Krutetskiis (1976) distinktion mellan det mekaniska och det matematiska minnet: På vilket sätt interagerar det *mekaniska* och det *matematiska minnet* under problemlösningsprocessen?

I mitt försök att besvara frågan kommer jag att behandla modellen för minnets biologiska och kognitiva organisation. Först kommer jag att beskriva minnets huvudsakliga indelning med avseende på dess funktioner, sedan kommer jag att diskutera de minnesprocesser och psykologiska aspekter som den indelningen medför. Avslutningsvis kommer jag att resonera om de konsekvenser som den kognitiva modellen kan tänkas ha vid Krutetskiis (1976) tolkning av det matematiska minnet.

Inledningsvis bör det nämnas att de första försöken att identifiera och kategorisera de processer som förknippas med minneshantering och kunskaper har resulterat i förklaringsmodeller vars termer är hämtade ur vardagsspråket och därmed ytterst begränsande (Squire, 2004). Ett exempel på en sådan

modell är indelning av kunskaper i två huvudkategorier: *att veta hur* respektive *att veta vad*.

Modellen med flertalet minnessystem är numera allmänt accepterad, men i sammanhanget bör det nämnas att begreppet *system* har en vidare betydelse inom biologin, eftersom det definieras både i termer av struktur och i funktion (Squire, 2004). Den moderna hjärnforskningen har visat att minnets främsta uppgift, bland flera andra distinkta funktioner, inte är att bevara information utan att glömma saker som är mindre viktiga. Det finns många sätt att kategorisera det mänskliga minnet (Nyberg & Bäckman, 2009) men skissen i figur 3 över minnets indelning visar de viktigaste kognitiva funktionerna som olika delar av hjärnan är förknippade med.



Figur 3

Minnets indelning

Som vi ser i illustrationen, så kännetecknas minnets olika delar framförallt av tiden som informationen lagras i dem, därför är distinktionen mellan *korttidsminne* och *långtidsminne* den mest grundläggande indelningen. Den största delen av korttidsminnet utgörs av *arbetsminne* där inlärningsprocessen äger rum.

Information som bearbetas i arbetsminnet försvinner efter högst 30 sekunder, vilket medför att repetition är det enda sättet att hålla kvar information i arbetsminnet. I långtidsminnet kan vi däremot under gynnsamma förhållanden behålla information hela vår livstid (Gärdenfors, 2010). Trots att man länge har vetat att repetition är viktig för inläring, så har aktuella studier visat att repetition antingen kan försvaga eller förstärka minnesspår i hjärnan, dvs. även kunskaper som individen besitter kan glömmas bort om återkallningen inte är effektiv (Hultén, 2011).

Om något skall läras och därmed kunna återkallas vid behov, så ska det placeras i långtidsminnet (Gärdenfors, 2010). Långtidsminnet delas in i två underkategorier: man skiljer mellan *explicit minne* och *implicit minne* beroende på vilken sorts information som lagras i respektive område. I det explicita minnet lagras information om händelser, erfarenheter och upplevelser samt fakta- och språkkunskaper. Denna sorts minne innehåller konkret information om det som vi kommer ihåg och varför vi kommer ihåg det. Information som lagras i det explicita minnet kan därför medvetet återkallas och förklaras; följaktligen är de tidigare nämnda *episodiska* och *semantiska* minnena lokaliserade i det explicita minnet (Davis, Hill, & Smith, 2000; Nyberg & Bäckman, 2009; Squire, 2004).

Precis som namnet antyder, baseras *episodiska minnen* på erfarenheter, eftersom vi medvetet (explicit) kan plocka fram information som har förvärvats i ett visst sammanhang och vid en viss tidpunkt, t.ex. kommer vi ihåg vad vi åt till lunch i förrgår eller vilket yrke någon ny bekantskap man gjorde på festen i lördags har (Nyberg & Bäckman, 2009).

Det *semantiska minnet* ”gör att vi kan föreställa oss saker som inte är närvarande för våra sinnen” (Gärdenfors, 2010, s.52). Denna sorts minnen återspeglar våra kunskaper om världen och innehåller fakta, figurer, teorier och definitioner som förvaras utan närmare information om omständigheterna i samband med deras förvaring:

Att Wien är huvudstad i Österrike eller att associationen mellan bord och stol är starkare än associationen mellan soffa och pistol är exempel på semantisk minnesinformation. Vi kan plocka fram denna information utan att behöva vara medvetna om när eller var vi förvärvade den. (Nyberg & Bäckman, 2009, s.105)

Det semantiska minnet ger oss förmågan att kunna kategorisera våra kunskaper och att konstruera kognitiva modeller om hur dessa kunskaper hänger samman (Gärdenfors, 2010). Med hjälp av en analogi till datorernas värld, så kan man betrakta det semantiska minnet som ett strukturerat nätverk som både rymmer och knyter ihop de olika begreppen.

Enligt den kognitiva modellen innefattar det explicita minnet både det episodiska och det semantiska minnet – att göra en klar distinktion mellan dessa två minnestyper är däremot inte helt oproblematiskt, eftersom många av våra minnen har både semantiska och episodiska karaktärsdrag. Den huvudsakliga skillnaden är att semantiska minnen är relativt fria från kontexten som de har förvärvats i medan episodiska minnen innehåller detaljer om kontexten som de formades i. I matematiska sammanhang är det synnerligen viktigt att differentiera dessa två minnestyper eftersom studier har antytt att inom matematiken kan procedurkunskaper leda till episodiska minnen som underlättar formandet av semantiska minnen (Davis et al., 2000).

I det implicita minnet lagras information om olika sorters procedurer, algoritmer och rörelsemönster som kan aktiveras när vissa händelser inträffar;

benämningen antyder att den här sortens minne även på den undermedvetna nivån har inflytande på vårt beteende. I matematiska sammanhang är *procedurminnet* den mest intressanta delen av det implicita minnet. Till området som innefattar procedurkunskap hör både inlärd beteenden och kognitiva algoritmer (Squire, 2004). Procedurminnet består av information om hur vi ska göra något till skillnad från varför vi ska göra det eller vad det är som vi ska göra; att cykla, att hantera sin mobiltelefon, att utföra algoritmer vid matematiska beräkningar är relevanta exempel på förmågor som är lagrade i procedurminnet (Davis et al., 2000; Nyberg & Bäckman, 2009). Ett tydligt exempel som illustrerar att procedurminnen är implicita (och därmed inte explicita) är faktumet att många elever mycket väl kan utföra beräkningar med hjälp av algoritmer, men har svårt att förklara dessa algoritmer när de inte använder dem (Davis et al., 2000).

I sammanhanget är det värdefullt att påminna om att Krutetskii's definition av matematiskt minne exkluderar sifferminne, minne för algoritmer och tabellkunskaper (Krutetskii, 1976). Kategoriseringen leder till att vi har god anledning att anta att det matematiska minnet inte är placerat i procedurminnet och därmed inte heller i det implicita minnet.

Avslutningsvis vill jag belysa det kognitiva systemet där den matematiska problemlösningen äger rum. Enligt den kognitiva modellen processar vi information i arbetsminnet och förvarar den i långtidsminnet.

Arbetsminne är egentligen en funktion som förknippas med hjärnbarken, vars huvudsakliga uppgift är att möta all ny information i spegeln av tidigare kunskaper och erfarenheter (Ingvar, 2009a). I arbetsminnet pågår en kontinuerlig och cyklisk process – t.ex. matematisk problemlösning – vars syfte är att upptäcka, reformera och vid behov förnya kunskap. Arbetsminnets storlek är någorlunda flexibel men ytterst begränsad, i arbetsminnet kan man enligt en tumregel behålla maximalt sju informationsenheter. Därmed är arbetsminnets funktionalitet starkt knuten till uppmärksamhet och koncentration förmåga – två viktiga komponenter i lärandeprocessen (Gärdenfors, 2010). Och som vi redan har konstaterat, samlas allt som vi har upplevt och lärt oss i långtidsminnet, oavsett om det handlar om upplevelser, vanor, fakta, färdigheter, procedurer, algoritmer eller problemlösningssmetoder – den avgörande kvalitativa skillnaden mellan dessa företeelser är om de handlar i det explicita respektive i det implicita minnet, men inte i båda samtidigt.

Eftersom procedurer, algoritmer och tabellkunskaper som används vid problemlösning sparas i procedurminnet, så återkallas de av arbetsminnet med hjälp av *automaticitet*. Uttrycket automaticitet betecknar en snabb och icke-resurskrävande process som inte påverkar andra minnesfunktioner (Ingvar, 2009a). Ingvar påpekar också att den första principen i hjärnbarkens funktion är att ”all inläring går ut på automatisering” (Ingvar, 2009a, s.36). Studier har visat att högpresterande elever löser matematiska problem genom att använda relativt liten hjärnkapacitet, något som antas vara en direkt konsekvens av att de automatiserar flera kognitiva processer (Ingvar, 2009b). Det

mest intressanta är dock förekomsten av automaticitet, eftersom automaticitet, förutom att spara arbetsminne, kan även initiera icke-automatiserade processer i det explicita minnet.

Modellen för arbetsminnets funktion bekräftas av flera psykologiska studier som visar att ofta förekommande resultat, värden och samband hamnar i minnet för att spara tid och göra beräkningar mera effektiva; högpresterande elever organiserar sina matematiska kunskaper så att de minimerar kognitiv verksamhet, dvs. de har bra balans mellan minnesanvändning och härledning samt de vet också vilka formler som måste läras utantill, vilka som räcker att läras delvis och vilka som kan härledas vid behov (Byers & Erlwanger, 1985; Scopes, 1973).

Sammanfattningsvis kan vi notera att distinktionen mellan det explicita och det implicita minnet vittnar om de kvalitativa skillnader som förknippas med matematiska aktiviteter: ur problemlösningssynpunkt ligger det explicita minnet på en högre kvalitativ nivå än procedurminnet och det verkar som att explicita minnen är associerade med förmågan att skapa mentala scheman för problemlösning och andra generella samband (Davis et al., 2000; Gärdenfors, 2010). Studier har dessutom visat att yngre barn förfogar över få mekanismer i hjärnan som kopplar information från procedurminnet till det explicita minnet (Ullman et al., 1997). Dessa studier bekräftar Krutetskii's observation att elever i de tidiga skolåren inte kunde göra skillnad mellan procedurer och djupare kunskaper, dvs. de mindes generella samband och konkreta fakta lika väl (Krutetskii, 1976).

Den ovan presenterade översikten leder till att vi kan upptäcka tydliga och direkta anknytningar mellan Krutetskii's psykologiska avgränsning av det matematiska minnet samt de kognitiva och biologiska modeller som beskriver hjärnans grundläggande minnesfunktioner. Krutetskii definierar matematiskt minne som ett generaliserat minne för matematiska samband, problemlösningsmetoder samt mentala strukturer för argumentation och bevisföring (Krutetskii, 1976). De elever i Krutetskii's studier som visade prov på ett välutvecklat matematiskt minne, kunde inte minnas problemens kontext och annan detaljerad information som hör till problemens formulering – däremot kunde de även lång tid efteråt komma ihåg lösningsmetoderna som de har använt. Lågpresterande elever kunde också komma ihåg information om problemen som de har försökt lösa, men informationen som de kom ihåg handlade om siffror och detaljerad kontext; deras minnen var kontextuella, dvs. inte generaliserade (*ibid*, s.299).

Enligt den kognitiva modellen är det möjligt att definiera det *matematiska minnet* som ett semantiskt minne för generella samband som inte är beroende av problemens kontext eller individens episodiska minnen. Allt detta resulterar i att man med stor sannolikhet kan anta att det matematiska minnet (enligt Krutetskii's definition) återfinns i det semantiska och därmed det explicita minnet – tabellkunskaper och algoritmer för beräkningar är däremot placerade i det implicita minnet. Den kognitiva och den biologiska modellen visar

också att arbetsminnets begränsning påverkar problemlösning på ett negativt sätt; automaticitet däremot underlättar och motverkar den begränsning. Krutetskii (1976) observerade att elever med särskild förmåga och fallenhet ägnar mycket tid åt matematisk problemlösning, de tycker om att lösa komplicerade matematiska problem och har en förmåga att *matematisera* världen. En direkt konsekvens av det bör vara att elever med särskild fallenhet för ämnet skapar många semantiska minnen och automatiserade processer i samband med matematiska aktiviteter – något som visar sig vara effektivt enligt den biologiska modellen.

Implikationer för studien

Översikten bekräftar Krutetskii's särskiljning av det *matematiska minnet* från ett minne för *procedurer*, *algoritmer* och *tabellkunskaper* i samband med matematiska aktiviteter. Även de biologiska och kognitiva modellerna har visat att det är meningsfullt att studera det matematiska minnet i samband med problemlösningsprocessen.

Översikten leder även till insikten att det i mina studier kommer att vara mycket svårt att upptäcka elevers automatiserade kunskaper, dvs. de som hör till procedurminnet. Väl medveten om detta, kommer jag att inte ägna större uppmärksamhet på att identifiera *procedurminnen* eftersom de är skilda från det *matematiska* (semantiska) *minnet* och därmed bortom syftet med denna studie.

Enligt den biologiska modellen förfogar yngre barn över få mekanismer i hjärnan som kopplar information från procedurminnet till det explicita minnet (Ullman et al., 1997). Därmed bekräftas Krutetskii's (1976) observation att elever i de tidiga skolåren inte kan göra skillnad mellan *procedurer* och *matematiska minnen*. Följaktligen motiveras mitt val att studera äldre elever (gymnasieelever) ytterligare av den biologiska modellen.

Jag har nu konstaterat att det är flera minnessystem som samverkar under matematiska aktiviteter och att det framförallt finns kvalitativa skillnader mellan dessa system. Även i den bemärkelsen bekräftas distinktionen mellan det matematiska minnet, som vittnar om förståelse för ämnet, respektive det mekaniska minnet som handlar om att memorera procedurer och algoritmer. Enligt den biologiska modellen visar sig skillnaden mellan de två minnessystemen delvis i hastigheten som informationen hanteras av arbetsminnet: automatiserade procedurer hanteras mycket snabbare än semantiska minnen. Men den kvalitativa skillnaden visar sig även i hur dessa minnen kan beskrivas av individen; det *matematiska minnet* (som är semantiskt) är *explicit* men befriat från kontext medan *procedurminnen* oftast inte kan beskrivas när procedurerna inte utförs.

Följaktligen kommer jag under mina observationer att använda teknologi som med god tidsmässig precision kan dokumentera elevernas aktiviteter. Jag kommer även att intervjua eleverna efter problemlösningen, för att på så

sätt kunna identifiera deras kontextbefriade semantiska minnen. Den kartläggningen bör leda till att jag med större precision kan identifiera och avgränsa det matematiska minnet i samband med problemlösningen.

Metod

Eftersom studiens syfte är att undersöka interaktionen mellan matematiska förmågor och det matematiska minnets roll vid problemlösning, så har jag grundat metoderna som jag har använt i denna undersökning dels i psykologisk och pedagogisk forskning om den matematiska förmågans och det matematiska minnets uttrycksformer (Krutetskii, 1976) och dels i resultatet av kognitiva och biologiska studier (Gärdenfors, 2010; Ingvar, 2009a; Klingberg, 2007) inom det aktuella området.

Jag har valt att använda flera kompletterande metoder i min empiriska undersökning. Den huvudsakliga metoden – som användes för att undersöka interaktionen mellan matematiska förmågor och det matematiska minnets roll vid problemlösning – kan kortfattat beskrivas enligt följande: sex gymnasieelever har löst två matematiska problem vardera och jag har observerat, dokumenterat samt analyserat deras agerande i samband med problemlösning och efterföljande intervjuer. Analysen av det insamlade empiriska materialet har genomförts med hjälp av kvalitativa forskningsmetoder.

En metaanalys av kvalitativ forskning visar att antaganden tillsammans med empiriska data är de kvalitativa studiernas viktigaste komponenter. För att utomstående bedömare ska kunna förstå resultaten som presenteras, bör studien tydligt redovisa både antaganden och empirisk grund (Larsson, 2005). Följaktligen kommer jag i detta och nästföljande avsnitt att redovisa mina antaganden i samband med valet av undersöknings- och datainsamlingsmetoder. På så sätt kan jag förhoppningsvis klargöra under vilka villkor studiens resultat gäller.

Undersökningsmetod

Härnäst ska jag, med utgångspunkt i tidigare presenterade teoretiska perspektiv och vägval, försöka motivera och beskriva valet av undersökningsmetod till den aktuella studien.

1. För att kunna undersöka interaktionen mellan elevers matematiska förmågor och det matematiska minnets roll i problemlösningsprocessen, så behövs det ett teoretiskt ramverk som på ett tillfredsställande sätt definierar och avgränsar dels den matematiska förmågan och särskilt det matematiska minnet i samband med elevers matematiska aktiviteter. Eftersom varken psykometriska tester eller tidiga matematikprestationer är tillräckligt goda indikatorer för elevers kommande matematiska prestationer, väljer jag ett ramverk som är resultatet av psykologiska studieansatser inom området.

I det avseendet konstituerar Krutetskii's (1976) definition av matematisk förmåga ett teoretiskt ramverk som både strukturerar komponenterna i den matematiska förmågan och innehåller en komponent som definieras som matematiskt minne.

Att Krutetskiis modell är användbar och har hög validitet har bekräftats av flera internationella studier och forskningsöversikt (Gyarmathy, 2002; Juter & Sriraman, 2011; Vincze, 2003; Vincze & Márton, 2004). Dessutom har två, nyligen genomförda, svenska studier visat att Krutetskiis ramverk kan användas på ett framgångsrikt sätt i syftet att synliggöra elevers matematiska förmågor (Dahl, 2011; Pettersson, 2011). Krutetskiis definition av det matematiska minnet som ett resultat av tidigare generaliseringar av matematiska samband, typiska egenskaper, problemlösningsmetoder samt mentala strukturer för bevisföring bekräftas även av den kognitiva modellen över hur de olika minnessystemen interagerar (Davis et al., 2000; Gärdenfors, 2010; Ingvar, 2009a). Min slutsats blev därmed att Krutetskiis modell kan utgöra en meningsfull grund för mina studier.

2. Den tidigare redovisade översikten av teoretiska perspektiv och vägval visar tydligt att matematiska förmågor varken kan utvecklas eller, på ett tillfredställande sätt, observeras utanför en matematisk aktivitet. Följaktligen ställde jag frågan om det finns någon matematisk aktivitet som möjliggör en kartläggning av interaktionen mellan elevers matematiska förmågor. Flera studier har visat att det mest effektiva sättet att ta reda på vad som ligger bakom den matematiska förmågan är att analysera matematiska problem och individers olika sätt att lösa dem (Dahl, 2011; Gyarmathy, 2002; Krutetskii, 1976; Pettersson, 2011; Vincze, 2003; Vincze & Márton, 2004; Wistedt, 2005; Øystein, 2011).

Analysen av ett givet problem, oavsett vilket matematiskt område det hör till, leder till att man kan härleda strukturen av det matematiska tänkandet som behövs för att lösa problemet (Halmos, 1981; Polya, 1957). I sammanhanget bör det nämnas att trots att matematiken är naturvetenskapens grundsten, hör inte individers olika sätt att lösa matematiska problem till naturvetenskapen. Därför valde jag en forskningsansats som behandlar områden som ligger utanför naturvetenskapen, dvs. icke lagbundna fenomen. Jag bestämde mig för att genom en *kvalitativ studie* undersöka individers olika sätt att lösa matematiska problem för att ta reda på hur de olika komponenterna i den matematiska förmågan interagerar.

3. Nästa frågeställning handlade om huruvida det finns någon elevgrupp, med avseende på ålder och prestation inom ämnet, som är bäst lämpad att delta i undersökningen. Krutetskii (1976) poängterar att äldre elever med särskild fallenhet för ämnet har förträffliga matematiska förmågor och ett välutvecklat matematiskt minne. Men det är också viktigt att påpeka att för att elever ska kunna visa prov på alla komponenter i den matematiska förmågan, så behöver de ha tillgång till matematiska uttryckssätt och en bakgrund som möjliggör att de på ett tillförlitligt sätt kan ge uttryck för dessa förmågor (Krutetskii, 1976).

Enligt den kognitiva modellen kan det matematiska minnet definieras som ett minne för generaliserade matematiska samband som individen medvetet kan referera till. På det sättet återfinns matematiska minnen i det semantiska

minnet som i sin tur ingår i det explicita minnessystemet. Biologin har placerat de två huvudsakliga formerna av långtidsminnet – det explicita och det implicita minnet – i skilda delar av hjärnan. Den arkitekturen medför att yngre barn förfogar över få mekanismer som kopplar information från det implicita procedurminnet till det explicita minnet, dvs. yngre barn kan inte göra skillnad på explicita och implicita minnen (Ullman et al., 1997). Även i Krutetskii (1976) studie observerade man att elever i de tidigare skolåren inte hade ett välutvecklat matematiskt minne – dessa elever mindes både detaljerad information och matematiska samband lika väl (*ibid*, s.339).

Följaktligen valde jag att observera elever som studerar på gymnasienivå, dvs. äldre elever.

Efter det valet skulle jag avgöra om deltagarna i studien ska rekryteras bland elever med särskild förmåga och fallenhet för ämnet eller bland högpresterande elever. När det gäller elevers särskilda fallenhet för matematik, så har den fallenheten inte något direkt samband med deras betyg i ämnet och metoderna som används för att identifiera dessa elever bör inte begränsas till endast matematisk problemlösning, utan måste kompletteras med andra observationer, som t.ex. resurskrävande fallstudier (Krutetskii, 1976; Lupowski-Shoplik, Sayler, & Assouline, 1994; Pettersson, 2011). Den sistnämnda anmärkningen ledde till att jag insåg att jag, inom studiens ramar, inte har möjlighet att på ett entydigt sätt identifiera elever med särskild förmåga och fallenhet för ämnet – följaktligen valde jag att observera högpresterande elever, som på ett enklare och mer tillförlitligt sätt kan identifieras med hjälp av deras betyg i ämnet.

Ovanstående argumentation ledde till att jag valde att observera högpresterande elever som studerar på gymnasienivå.

4. Den fjärde frågeställningen handlade om vilken sorts uppgifter som var mest lämpade för att undersöka de matematiska förmågornas interaktion under problemlösningsprocessen. Krutetskii poängterar att uppgifterna måste vara konstruerade på ett sätt, så att deras lösning synliggör de matematiska förmågorna som behövs för att lösa dem.

Experimental problems ought to fulfill their direct purpose: solving them should help to clarify the structure of abilities. (Krutetskii, 1976, s.91)

Frågeställningen är särskilt viktig eftersom studier har visat att undervisning, kunskaper och tidigare erfarenheter i ämnet påverkar elevers sätt att lösa problem (Krutetskii, 1976; Öystein, 2011). Jag hade för avsikt att undersöka elevernas matematiska förmåga, inte deras kunskaper om procedurer och algoritmer – trots att jag är medveten om att förmåga är en känslig företeelse som inte kan frikopplas från tidigare erfarenheter (Krutetskii, 1976). Situationen beskrivs av Krutetskii på följande sätt:

In the one hand, when knowledge, skills and habits are acquired, abilities are developed; their formation and development is impossible outside the process

of mastering the appropriate knowledge, skills and habits. (Krutetskii, 1976, s.70)

I Krutetskii (1976) undersökning valde forskarlaget att använda nya och utmanande matematiska problem som inte är av standardkaraktär, för att så långt som möjligt undvika påverkan av elevernas tidigare erfarenheter och kunskaper:

... we are studying ability, not knowledge, habits and skills ... It is hard to isolate the factor of ability in this intricate complex of causes. Apparently one should select problems in such way that only ability will primarily influence their solutions. It is clearly impossible to completely eliminate the influence of past experience, knowledge and habits. (Krutetskii, 1976, s.70)

Det matematiska minnet bör inte förväxlas med det mekaniska minne som vi använder när vi övar tabellkunskaper, hanterar formler eller använder regler i samband med algoritmer. Och vi har också sett att ”dess utmärkande drag har sitt ursprung i matematikämnets natur, det handlar om ett minne för generaliseringar, formaliserad struktur och logiska system” (Krutetskii, 1976, s.350, min översättning). Krutetskii studie visar att högpresterande elever även lång tid efteråt kunde minnas metoderna som behövdes för att lösa en viss typ av problem.

Med tanke på att det är problematiskt att differentiera förmågor, kunskaper och inlärda metoder, blev valet av matematiska problem en nyckelfråga i min undersökning. Följaktligen valde jag att låta eleverna lösa (för eleverna) nya och utmanande matematiska problem som inte är av standardkaraktär – i kapitlet som redogör för den empiriska studien kommer jag att beskriva mer ingående hur valet av uppgifter gick till.

Ovan listade frågeställningar och tillhörande resonemang om elevers möjligheter att visa prov på matematiska förmågor och på förekomsten av det matematiska minnet ledde till att jag valde att undersöka den matematiska förmågans uttryck hos högpresterande gymnasieelever genom att analysera elevers agerande i samband med problemlösning av för eleverna nya och utmanande matematiska problem.

Datainsamlingsmetod

När man väljer ansatser och metoder till en kvalitativ studie, så medför dessa val även perspektiv som påverkar resultaten som studien levererar (Larsson, 2005). Studier som analyserar kvaliteten i kvalitativ forskning betonar vikten av att det bör finnas ”en harmoni mellan forskningsfrågor, datainsamling och analysteknik” (Larsson, 2005, s.20). Howe och Eisenhart (1990) understryker dessutom att den harmonin bör ha en intern ordning, dvs. det är forskningsfrågan som bör påverka datainsamlings- och analysmetoder istället för att implikationen sker i omvänd riktning. Efter att forskningsfrågorna formu-

lerades och de teoretiska perspektiven mynnade ut i de tidigare presenterade undersökningsmetoderna, påbörjade jag processen med att utforma datainsamlingsmetoder till denna studie. Nedan följer en redovisning av kriterierna som jag tog hänsyn till när jag utformade datainsamlingen.

1. Studier som har observerat elevers matematiska problemlösning påpekar att datainsamlingen inte enbart bör begränsas till elevernas skriftliga lösning av problemet; den bör också ske via kompletterande observation under problemlösningen och genom samtal där eleven kommunicerar sin tankeprocess (Dahl, 2011; Krutetskii 1976; Lupowski-Shoplik et al., 1994; Öystein, 2011). Följaktligen valde jag att observera elever under problemlösningsprocessen. Under aktiviteten begränsas samspelet till två slag av muntlig kommunikation: elevernas spontana reflektioner och deras svar på mina frågor.

Att elever inte är vana att kommunicera sina tankar medan de löser matematiska uppgifter påpekas i flera studier och detta var ett bekymmer redan i Krutetskii's undersökningar på 1960-talet (Krutetskii, 1976). Att lösa ett matematiskt problem individuellt med hjälp av papper och penna är en vanligt förekommande matematisk aktivitet i den svenska skolan, däremot händer det sällan att elever diskuterar och muntligt redovisar sina lösningar (Bentley, 2003; Skolverket, 2003). På grund av att elever inte är vana att muntligt redovisa sina lösningar, tror de alltför ofta att deras muntliga redovisning ska innehålla en förklaring av hur de löste uppgiften eller att de ska redovisa de egna mentala processerna i samband med lösningen (Krutetskii, 1976).

Med den nämnda problematiken i åtanke har jag i samband med denna studie noggrant förklarat för eleverna att de inte behöver redovisa orsaken till hur de tänker eller hur de vill lösa uppgiften – de skulle bara tänka högt, utan att reflektera över vad de säger. Ett par dagar innan genomförandet av observationerna har eleverna dessutom fått en skriven text (bilaga 2) som sammanfattade hur observationen kommer att gå till och hur de bör yttra sig under problemlösningen.

En del av det insamlade materialet består naturligtvis av elevers lösningar av de givna problemen. I samband med observationen blev de instruerade att skriva ner lösningarna i detalj samt att de ska undvika att endast i huvudet utföra räkneoperationer och algoritmer under problemets lösning. Under problemlösningen använde jag en *halvstrukturerad* observationsmetod där eleven fritt kunde kommunicera sina tankar – men när de inte gjorde det, ställde jag ett begränsat antal frågor. Frågorna var ämnade att klargöra deras tankar under problemlösningsprocessen; det innebar att om eleven varken skrev, ritade eller pratade under en längre tidsperiod, ställde jag följande *strukturerade frågor* – som i princip är identiska med frågorna som ställdes i Krutetskii's studie:

- Vad är det som stör dig?
- Varför gör du det?
- Vad vill du göra och varför?
- Vad tänker du på?

(Krutetskii, 1976, s.92-95; min översättning)

I sammanhanget bör det påpekas att den första frågan ”Vad är det som stör dig?” endast ställdes om eleven var påtagligt osäker under problemlösningen.

2. I avsnittet som diskuterar den biologiska modellens struktur har det konstaterats att det är flera minnessystem som samverkar under matematiska aktiviteter och att det finns kvalitativa skillnader mellan dessa system. I den bemärkelsen bekräftades den kognitiva distinktionen mellan det *matematiska minnet* (som vittnar om en sorts förståelse för ämnet) respektive *procedurminnet* (som bl.a. hanterar räkneoperationer och algoritmer). Enligt modellen yttrar sig den kvalitativa skillnaden mellan de två minnessystemen delvis i hastigheten som informationen hämtas till arbetsminnet: *automatiserade* procedurer hanteras mycket snabbare än *semantiska*, dvs. *matematiska minnen*. Men skillnaden visar sig även i hur dessa minnen kan beskrivas av individen; det matematiska minnet är explicit och befriat från kontext medan procedurminnen sällan kan beskrivas av individen när de inte utförs. För att kunna synliggöra elevers matematiska minnen, behövde jag en datainsamlingsmetod som möjliggör att deltagarna kommunicerar sina tankar i samband med problemlösningen.

Eftersom elever inte är vana att kommunicera sina tankar medan de löser matematiska uppgifter, så fanns det en uppenbar risk att en stor del av deras kognitiva aktiviteter inte kunde dokumenteras under problemlösningsprocessen (Krutetskii, 1976). Därför valde jag att efter observationen genomföra en *kontextuell intervju*. En kontextuell intervju tar sin början i en mer eller mindre deltagande observation (Hultman, 2004). Den kontextuella intervjun, som genomfördes i direkt anslutning till observationen, fokuserade på elevernas tankar och upplevelser i samband med problemlösningen. Under intervjun använde jag inte en i förväg bestämt intervjuguide; samtalet var därmed förankrat i den tidigare genomförda observationen. För att eleverna på ett bättre sätt ska kunna anknyta till sina tankar från den nyligen avslutade uppgiften, hade de tillgång till sina anteckningar från problemlösningen.

3. Interaktionen i klassrummet påverkar elevens tankeprocesser och flera studier (van Leeuwen & Jewitt, 2001; Norris, 2002) har visat att den interaktionen inte behöver begränsa sig till muntlig kommunikation – även gester, bilder och andra skeenden påverkar processen. Krutetskii (1976) påpekar också att det skulle ha varit omöjligt att synliggöra de matematiska förmågornas skilda karaktärer om eleverna hade observerats i en klassrumssitua-

tion, eftersom elever i en sådan situation inte kan tänka ostört. Forskarlaget befarade att även de genomförda intervjuerna skulle påverkas av att andra elever lyssnade på den enskilde elevens förklaringar av hur den löste problemet. För att undvika dessa störande faktorer, genomförde Krutetskii (1976) forskarlag enskilda observationer av elever.

För att elevernas tankar i så liten utsträckning som möjligt ska bli påverkade under aktiviteten – och därmed på ett bättre sätt kunna analyseras med avseende på matematiska förmågor – valde jag att låta dem lösa problemen individuellt, under enskilda observationer. För att minska elevernas stress under den ovanliga situationen som en observation innebär, har de fått obegränsad tid för att lösa problemen. Aktiviteten var slut när eleverna upplevde att problemet var löst eller när de inte längre ville arbeta med det. För att öka studiens validitet, löste alla elever samma matematiska problem.

4. Slutligen redovisar jag teknologin som användes i samband med datainsamlingen. Det största problemet i sammanhanget är att det inte finns tillförlitliga metoder för att dokumentera aktiviteter som är av kognitiv karaktär. Teknologin som vi idag har tillgång till för att dokumentera observationer är naturligtvis mycket mer avancerad än för 50 år sedan, men problemet som kvarstår formulerades av Krutetskii på följande sätt:

... the study of problem-solving is greatly complicated because the process is not always expressed objectively enough; many links in the mental process of solving a problem escape the investigator. (Krutetskii, 1976, s.92)

Även i nyligen genomförda studier (Dahl, 2011; Sriraman, 2003; Öystein, 2011) använde man endast elevers skriftliga lösningar, gruppdiskussioner och intervjuer för att klargöra elevers tankar under problemlösningen. De nämnda studierna vittnar också om stora svårigheter när det gäller att synliggöra elevers tankeprocesser.

Väl medveten om att jag inte helt skulle kunna undvika den nämnda problematiken, men för att på ett bättre sätt dokumentera observationerna, valde jag att kombinera flera olika teknologier under datainsamlingen. Dels använde jag en diktafon för att spela in alla ljud under observationerna; på det sättet fick jag tillgång till ett kronologiskt inspelat ljudmaterial. För att komplettera ljudinspelningen, använde jag även en digitaliserad inspelning av elevernas anteckningar, skriftliga lösningar och yttranden under problemlösningen. Den digitaliserade inspelningen genomfördes med hjälp av digitala pennor och tillhörande anteckningsblock – en teknologi som möjliggör att observationen både entydigt och på ett exakt sätt kan koppla elevernas yttranden till deras skriftliga lösningar. En utförlig beskrivning av den använda teknologin finns på portalen www.livescribe.com.

Den empiriska studien

Planering

Efter att undersöknings- och datainsamlingsmetoder var definierade och avgränsade, började jag planera den empiriska undersökningen. Undersökningen, dvs. observationer och intervjuer genomfördes under en enda dag i juni 2010.

Den inledande uppgiften bestod i att hitta en elevgrupp som passade mina undersökningsmetoder, dvs. högpresterande gymnasieelever som var intresserade av att delta i en vetenskaplig studie. En viktig faktor, som har underlättat uppgiften, var att jag vid den tiden under några år hade arbetat som matematikutvecklare i en av landets större städer; under åren som föregick studien hade jag inom ramen för min tjänst initierat ett nätverk av matematiklärare som träffades under diverse seminarier och diskussionsgrupper. Inom nätverket har jag haft förmånen att få personlig kontakt med flera ambitiösa matematiklärare som ofta diskuterade sina intresserade och högpresterande elever. Vid en förfrågan bland dessa lärare visade det sig att en av lärarna precis hade börjat undervisa en klass där det fanns gott om elever som på ett utmärkt sätt passade in på beskrivningen av högpresterande gymnasieelever i matematik. Eleverna i fråga studerade i den första årskursen på gymnasiet i en klass som hade en avancerad matematikprofil; alla elever i klassen hade studerat den första gymnasiekursen i matematik (Matematik A) under grundskoletiden och de flesta eleverna i klassen hade fått det högsta betyget i kursen. Därmed hade jag hittat en elevgrupp som innehöll högpresterande elever i skolämnet matematik.

Efter förberedande analys och diskussioner med läraren och med min handledare, beslutade jag att det skulle vara lämpligt att bekanta mig med klassen i god tid före den planerade studien, detta dels för att eleverna skulle ha tillräcklig tid att förstå vad undersökningen kommer att handla om och dels för att de skulle hinna vänja sig med min närvaro under de matematiska aktiviteterna, för att på så sätt minska deras stress under de kommande observationerna.

Följaktligen blev jag introducerad till klassen under januari 2010 av matematikläraren; eftersom observationerna var planerade att genomföras under slutet av vårterminen 2010, så uppfattade vi att det skulle finnas tillräckligt med tid och tillfällen för att jag och eleverna skulle hinna bekanta oss under de 4-5 månaderna som återstod. Efter att jag har förklarat anledningen till min närvaro i klassrummet, var jag närvarande under, i genomsnitt, en lektion per vecka. Under dessa lektioner agerade jag mest som deltagande vän, dvs. om eleverna tillfrågade mig, så hjälpte jag dem att lösa uppgifter eller förklarade samband inom det aktuella matematiska området. På så sätt und-

vek jag att agera som hjälplärare, dvs. en auktoritet i klassen och hoppades på att eleverna skulle få förtroende för mig. Efter att eleverna noggrant hade testat mina matematikkunskaper, upplevde jag att de accepterade min närvaro under lektionerna och de fick även ett visst förtroende för mig. Efter några veckor började eleverna prata om sina upplevelser om matematiken och undervisningen samt började ställa personliga frågor om mitt arbete. På så sätt blev en, för undersökningen, viktig förutsättning avklarad: det verkade som att eleverna inte blev störda när jag observerade deras problemlösning.

Urval av deltagare

Två månader innan observationernas genomförande, i april 2010, upplevde jag att eleverna var tillräckligt intresserade av studien för att vi skulle kunna rekrytera frivilliga deltagare till projektet. För att jag inom ramen för projektet skulle kunna hantera den producerade datamängden, beslutade jag att begränsa antalet elever som skulle observeras till sex.

Innan jag frågade eleverna om de skulle kunna tänka sig att delta i studien, kom jag överens med läraren att om fler än sex elever kommer att anmäla sig till studien, så kommer vi att sträva efter en jämn könsfördelning bland de sex deltagarna. I sammanhanget vill jag nämna att den jämna könsfördelningen inte var en målsättning för studien, men jag antog att en sådan fördelning skulle ge bättre information om de matematiska förmågornas interaktion och det matematiska minnets närvaro i problemlösningen.

I slutet av april fick de som var intresserade en skriftlig beskrivning av forskningsprojektet (bilaga 1); syftet var att både elever och deras målsmän skulle förstå vad elevernas deltagande i projektet innebar. Efter att ha diskuterat med sina målsmän, återstod nio elever som ville delta i studien. I samförstånd med eleverna och deras lärare lottade vi ut sex deltagare till studien: tre flickor och tre pojkar.

Val av matematiska problem

Som jag tidigare diskuterat i avsnittet som behandlar undersökningsmetoder, blev valet av matematiska problem är en nyckelfråga för studiens genomförande och kvalitet.

Flera studier har visat att undervisning, kunskaper och tidigare erfarenheter i ämnet påverkar elevers sätt att lösa matematiska problem (Krutetskii, 1976; Öystein, 2011). Jag ville undersöka elevernas matematiska förmåga, inte deras kunskaper i ämnet – trots att jag var medveten om att förmågan inte helt kan frikopplas från tidigare erfarenheter. Inspirerad av Krutetskii (1976) bestämde jag mig för att välja eller konstruera nya och utmanande matematiska problem som inte var av standardkaraktär, för att så långt som möjligt

undvika påverkan av elevernas tidigare erfarenheter och kunskaper i skolämnet matematik.

I mitt resonemang om undersökningsmetoder framkommer att riktlinjen, att uppgifterna skulle vara nya och utmanande, endast var ett delmål i projektet; uppgifterna skulle även vara konstruerade så att de synliggjorde strukturen bakom de matematiska förmågor som behövdes för att lösa dem och det matematiska minnets närvaro i samband med problemlösningen.

Krutetskii (1976) påpekar att eleverna med hjälp av den matematiska förmågan använder matematiskt material för att skapa generaliserade, dvs. matematiska minnen. Det medför att generaliserade minnen både bör formas och vara närvarande under problemlösning av nya och utmanande matematiska problem.

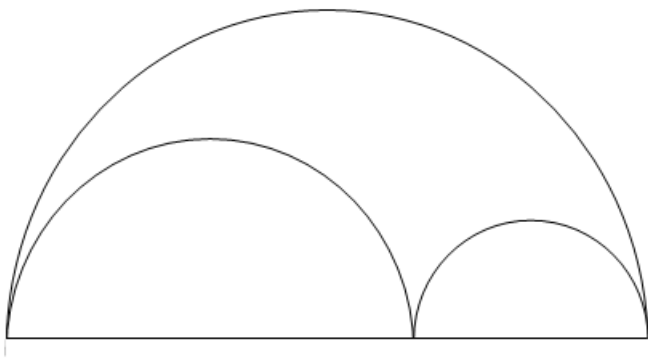
Efter att ingående ha studerat metoderna som Krutetskii (1976) forskarlag har använt för att välja uppgifter, deltagit i flera av elevernas lektioner och tillsammans med läraren kartlagt vilka matematiska områden eleverna har behandlat, kunde jag till slut identifiera 12 uppgifter som uppfyllde de ovan nämnda kraven, dvs. de var nya och utmanande matematiska problem som kunde synliggöra både interaktionen mellan matematiska förmågor och det matematiska minnets närvaro under problemlösningsprocessen. Uppgifterna var delvis konstruerade av mig och delvis valda från problemsamlingar som eleverna inte hade arbetat med i skolan. Valet och konstruktionen av uppgifter underlättades delvis av faktumet att eleverna i den aktuella kursen använde läromedel som jag är författare till (Szabo, Larson, Viklund, & Marklund, 2009). På så sätt kunde jag bilda mig en bra uppfattning om vilka uppgifter eleverna arbetat med i samband med skolans matematikundervisning. Samtidigt förstod jag att det – eftersom det handlade om högpresterande elever med intresse och fallenhet för ämnet – fanns en risk att de valda uppgifterna inte skulle vara helt nya för eleverna. Krutetskii formulerar problematiken på följande sätt:

One must conclude that all attempts to find mathematical problems whose solution would be determined by ability alone and would not depend at all on the available knowledge, skills, and habits are doomed to failure. (Krutetskii, 1976, s.94)

Efter fördjupad analys samt ytterligare diskussioner med läraren valde jag nedanstående två uppgifter till observationerna. Eftersom studier (Juter & Sriraman, 2011; Krutetskii, 1976) har identifierat tre olika matematiska typer bland elever: den *geometriska typen*, som gärna visualiserar ämnet; den *analytiska typen*, som använder abstrakta tankestrukturer och den *harmoniska typen*, som är en kombination av de två föregående typerna, valde jag en geometrisk uppgift och en algebraisk uppgift. På så sätt ville jag utöka möjligheterna för eleverna att visa prov på sina matematiska förmågor.

Problem 1

I en halvcirkel ritar vi ytterligare två halvcirklar, enligt figuren.



Är den stora halvcirkelns längd större, mindre eller lika med summan av de två inskriva halvcirklarnas längder?

Motivera ditt svar.

Problemet utgår från ämnesområdet geometri och är inspirerat av problemserien som Krutetskiis (1976) forskarlag använde för att undersöka följande komponenter i den matematiska förmågan: förmågan att *insamla matematisk information*, förmågan att *tänka logiskt*, förmågan att *förkorta matematiska resonemang*, förmågan att *generalisera* och det *matematiska minnets närvaro*.

Problemet kan inte lösas endast med hjälp av kunskaper från geometrin, utan det behövs även algebraiska kunskaper för att lösa det. I avsnittet där jag analyserar elevers problemlösning kommer jag att redovisa de metoder som kan användas för att lösa problemet.

Problem 2

Maria och Peter vill köpa en cd-skiva. I affären inser de att Maria har 24 kr mindre och Peter 2 kr mindre än vad skivan kostar. Även när de lägger ihop sina pengar, så räcker inte pengarna för att kunna köpa cd-skivan.

Hur mycket kostar cd-skivan och hur mycket pengar har Maria respektive Peter?

Problem 2 är en omskrivning av en uppgift som Krutetskiis (1976, s.149) forskarlag använde för att undersöka följande matematiska förmågor: förmågan att *insamla matematisk information*, förmågan att *tänka logiskt*, förmågan att *förkorta matematiska resonemang* och det *matematiska minnets närvaro*.

Observationer i samband med problemlösning

Eftersom de valda problemen inte direkt kunde placeras i det matematiska området som eleverna studerade vid studiens genomförande, så ville jag försäkra mig att problemen varken var för svåra eller för lätta och att eleverna kunde lösa dem. Kontrollen skedde dels i samarbete med läraren, genom att hon valde uppgifter som enligt hennes uppfattning skulle kunna lösas av deltagarna. Sedan genomförde jag ytterligare en kontroll; genom att låta andra högpresterande elever lösa de valda problemen kunde jag se att dessa uppfyllde sin funktion i praktiken, dvs. högpresterande elever som var i samma ålder som deltagarna kunde mer eller mindre framgångsrikt lösa båda problemen.

Inför observationen förklarade jag för deltagarna hur de skulle agera i samband med observationen. De fick också veta att det är naturligt att uppleva stress när man blir observerad, men att jag inte skulle bedöma deras kunskaper i ämnet. Jag förklarade att de inte ens behövde lösa uppgiften eftersom jag bara skulle titta på deras angreppssätt. Däremot skulle de försöka skriva ner allt som de kom på under problemlösningen och om det var möjligt, så skulle de även tänka högt, som om de var ensamma och kunde höra sina tankar. Några dagar innan observationen fick eleverna även en skriftlig text (bilaga 2) som innefattade dessa förklaringar och instruktioner. För att eleverna inte skulle uppleva obehag inför teknologin, fick de under mina lektionsbesök upprepade gånger leka och träna på att skriva med de digitala pennorna.

Eleverna löste de två problemen under två, på varandra följande, enskilda observationer. I samband med observationerna fick de lova att de inte skulle berätta för de andra eleverna vad uppgifterna handlade om, detta för att alla deltagare ska få samma förutsättningar inför observationen. Alla observationer genomfördes under en och samma dag, framförallt för att minska risken att eleverna skulle diskutera problemen med sina kamrater.

Elevernas muntliga yttranden spelades in både med hjälp av diktafon och med den digitala pennan. Om en elev varken skrev, ritade eller talade under processen, så ställde jag någon av nedanstående fyra frågor till dem. Som jag nämnde tidigare, var frågornas främsta uppgift att klargöra elevens tankar under problemlösningen och är i princip identiska med frågorna som ställdes i Krutetskii's studie:

- Vad är det som stör dig?
- Varför gör du det?
- Vad vill du göra och varför?
- Vad tänker du på?

(Krutetskii, 1976, s.92-95, min översättning)

De skriftliga lösningarna spelades in med hjälp av digitala pennor och tillhörande anteckningsblock; på så sätt kunde deras lösningar återges som tecknade ljudfilmer. Problemlösningen var klar när eleven upplevde att den var klar, dvs. de hade i princip obegränsat med tid för att lösa problemet. I praktiken visade det sig att ingen elev behövde mer än 14 minuter för att lösa något av problemen.

Intervjuer efter observationer

I samband med varje observation genomförde jag en kontextuell intervju med varje deltagare. Intervjuerna, som genomfördes i direkt anslutning till observationen, fokuserade elevernas tankar och upplevelser av problemlösningen. Ambitionen var att ta reda på sådant som de möjligtvis missat att kommunicera under problemlösningen; bl.a. resultatet av deras generaliseringar, dvs. det matematiska minnets närvaro i problemlösningsprocessen.

Den kontextuella intervjun saknade en bestämd intervjuguide, däremot var den förankrad i den tidigare genomförda observationen. För att eleverna på ett bättre sätt skulle kunna anknyta till sina tankar från den nyligen avslutade uppgiften, hade de tillgång till sina anteckningar från problemlösningen. Dessa intervjuer var i genomsnitt 4 minuter långa och kompletterade de tidigare genomförda observationerna.

Etiska ställningstaganden

Att uppvisa god etik är en viktig princip i genomförandet av vetenskapliga studier. För forskaren är det naturligtvis av stort intresse att producera nya och intressanta resultat men intresset bör vägas mot kravet på skydd för de individer som har deltagit i studien (Larsson, 2005). I den avvägningen är det viktigt att inse att man aldrig kan garantera absolut skydd för deltagarna eftersom tekniska och mänskliga faktorer, som forskaren inte kan ha kontroll över, kan påverka deltagarnas integritetsskydd.

Studiens etiska ställningstaganden överensstämmer med Vetenskapsrådets forskningsetiska principer (2009) – en närmare beskrivning av dessa aspekter följer härnäst. Inför studien har varje deltagande elev fått information om studiens syfte och om deras roll i projektet. Den informationen, i form av ett brev, har sedan skickats till elevernas målsmän (bilaga 1). Inför studien har målsmän för de deltagande eleverna givit sina skriftliga godkännanden för att eleverna ska få medverka i studien.

Varken skolan eller staden som eleverna studerar i har angivits i den skriftliga redovisningen av studien; även i kontakter med kollegor och bekanta har jag undvikit att namnge eleverna och deras skola. Matematikläraren nämns

inte heller med namn, utan nämns endast som ”läraren” i studien. Elevernas namn har också avkodats direkt efter transkribering.

Ett annat etiskt problem dök upp när det inspelade samtalet skulle transkriberas. Detta dilemma grundas i att under observationerna och i den efterföljande intervjun använde eleverna ett något slarvigt talspråk. Ljudupptagningen vittnar om att eleverna ofta sade ”ba” eller ”asså” – jag valde att transkribera dessa uttryck som de bör se ut i en skriven text, dvs. ”ba” blev ”bara” och ”asså” blev ”alltså”. Detta beror på jag på ett användbart och begripligt sätt ville återge innehållet i elevernas uttalanden. Med de nämnda reservationerna har jag ordagrant transkriberat det insamlade materialet. Både det inspelade och det transkriberade materialet har förvarats i kassaskåp på mina olika arbetsplatser; analysarbetet har skett i enskildhet eller i miljöer där närvarande personer varken kunde identifiera skolan eller eleverna.

Deltagande elever har fått varsin biobiljett efter de genomförda observationerna. På så sätt ville jag visa min uppskattning av att eleverna på sin fritid har deltagit i denna studie. Biobiljetterna hade jag köpt för egna pengar och eleverna visste inte i förväg att de skulle få någon form av belöning för sin medverkan i projektet.

Analys

Som jag nämnde i avsnittet som beskriver undersökningsmetoder, valde jag att kombinera flera olika metoder under datainsamlingen. Jag använde diktafon för att spela in alla yttranden under problemlösningen, för att komplettera ljudinspelningen registrerades elevernas skriftliga lösningar och yttranden även med digitala metoder. Under problemlösningen använde jag en halvstrukturerad observationsmetod, vilket innebär att eleverna dels kommunicerade sina tankar fritt, dels svarade på i förväg bestämda frågor. Efter problemlösningen genomförde jag en kontextuell intervju vars syfte var att klargöra elevers tankar och upplevelser i samband den nyligen genomförda observationen.

Analysmall för de undersökta förmågorna

I avsnittet som behandlar teoretiska perspektiv redovisar jag flera anledningar till varför just följande tre huvudkomponenter av den sammansatta matematiska förmågan undersöktes med hjälp av den presenterade studien:

- förmågan att *insamla och formalisera matematisk information*,
- förmågan att *bearbeta matematisk information* och
- förmågan att *minnas matematisk information*.

I samma avsnitt visar en djupare analys av det matematiska minnets egenskaper att det framförallt är ett minne för generaliserade samband och att det matematiska minnet även kan formas under problemlösningsprocessen (Krutetskii, 1976). I det avseendet blir

- förmågan att *generalisera matematiska samband*, som är en komponent i förmågan att bearbeta matematisk information

en viktig förutsättning i skapandet av matematiska minnen. Därför kommer jag att försöka identifiera även den förmågan i denna studie.

Följaktligen, med utgångspunkt i Krutetskii's (1976) definitioner, konstruerade jag en analysmall för att lättare kunna identifiera de förmågor som denna studie fokuserar. Mallen innehåller även exempel på de matematiska aktiviteterna som synliggör aktuella förmågor under problemlösningens olika faser.

Analysmall

- 1) förmågan att *insamla* och *formalisera matematisk information*, t.ex. förmåga att se den formella strukturen i ett matematiskt material, förmåga att göra både analys och syntes samtidigt av ett matematiskt material och på så sätt fånga helheten utan att tappa delarna
 - t.ex. eleven tänker, ritar, noterar eller bestämmer relationer mellan storheter och variabler.
- 2) förmågan att *bearbeta matematisk information*, t.ex. förmåga till logiskt tänkande, systematiskt och sekventiellt tänkande, flexibilitet i tänkandet samt en strävan efter att förenkla och förkorta resonemanget i en problemlösning
 - t.ex. eleven använder kända metoder för problemlösning eller kontrollerar sin valda metod.
- 3) förmågan att *generalisera matematiska samband*, dvs. förmågan att införliva ett specialfall i ett, för eleven, känt generellt sammanhang, förmåga att från ett eller flera specialfall kunna se allmängiltiga samband eller relationer
 - t.ex. eleven upptäcker samma typ av problem i ett annat sammanhang eller inser att flera numeriska lösningar leder till en allmän algebraisk lösning.
- 4) förmågan att *minnas matematisk information*, t.ex. förmåga att minnas matematiska relationer, problemtyper och huvudsakliga argument i bevis
 - t.ex. eleven kommer ihåg formeln för cirkelns area eller minns att man kan göra om det givna problemet till en ekvation eller en olikhet.

Under analysen har jag använt ovanstående numrering av förmågor (1, 2, 3 och 4) för att på ett enklare sätt kunna notera kopplingar mellan framträdande mönster och matematiska förmågor i det empiriska materialet.

Analys av de givna matematiska problemen

Innan eleverna skulle delta i studien, genomförde jag en a-priori analys av problemen, för att kartlägga de matematiska förmågor och faser som skulle kunna vara möjliga att identifiera under respektive problems lösning. Syftet med a-priori analysen var att avgränsa de, i analysmallen beskrivna, förmågor som kunde identifieras under problemens lösning.

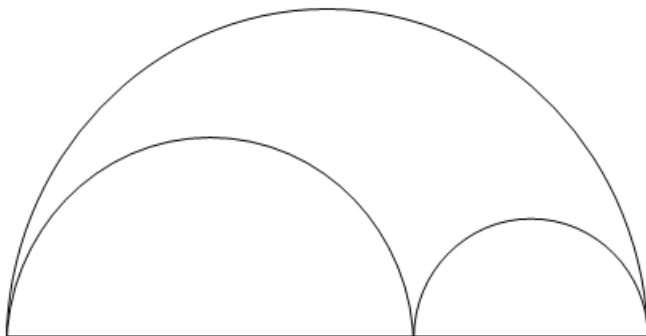
A-priori analysen identifierade matematiska förmågor på två olika abstraktionsnivåer. De förmågor som direkt kan observeras i skriftliga lösningar och muntliga yttranden utgör det *manifesta innehållet* i det empiriska materialet. Förmågor som inte direkt kan observeras under problemlösningsprocessen –

t.ex. förmågan att *minnas matematisk information* – utgör det *latenta innehållet* i det empiriska materialet.

Förekomsten av latent innehåll leder naturligtvis till insikten att skriftliga lösningar inte kan påvisa alla förmågor som interagerar i den dynamiska matematiska förmågan som används under problemets lösning. Analysen och tolkningen av det latent innehåll beskriver närmare i avsnitten Observationsanalys respektive Intervjuanalys.

A-priori analys av Problem 1

I en halvcirkel ritar vi ytterligare två halvcirklar, enligt figuren.



Är den stora halvcirkelns längd större, mindre eller lika med summan av de två inskrivna halvcirkelarnas längder?

Motivera ditt svar.

Lösning av Problem 1

Uppgiften kan lösas huvudsakligen på två kvalitativt skilda sätt.

Lösning I – det allmänna fallet

Notera den stora cirkelns diameter med d

Den stora cirkelns omkrets = $\pi \cdot d$

Den stora halvcirkelns längd = $\pi \cdot d/2$

Notera den mindre inskrivna cirkelns diameter med x

Den större inskrivna cirkelns diameter = $d - x$

Summan av de två inskrivna cirkelns omkrets = $\pi \cdot x + \pi(d - x) = \pi x + \pi d - \pi x = \pi d$

Summan av de två inskrivna halvcirkelarnas längder = $\pi \cdot d/2$

Svar: Den stora halvcirkelns längd är lika med summan av de två inskriva halvcirklarnas längder.

Lösning II – numerisk ansats som leder till det allmänna fallet

Ange den stora cirkelns diameter med ett tal, t.ex. 3

Den stora cirkelns omkrets = $\pi \cdot 3$

Den stora halvcirkelns längd = $\pi \cdot 3/2 = 1,5\pi$

Notera den mindre inskrivna cirkelns diameter med 1

Den större inskrivna cirkelns diameter = $3 - 1 = 2$

Summan av de två inskriva cirklarnas omkrets = $\pi \cdot 1 + \pi \cdot 2 = 3\pi$

Summan av de två inskriva halvcirklarnas längder = $\pi \cdot 3/2 = 1,5\pi$

Sedan testas det med ett nytt tal för den stora cirkelns diameter, t.ex. 5

Ovanstående procedur upprepas för att testa om de två längderna är lika.

Efter det kan man generalisera resultaten, genom att t.ex. konstatera att ”Detta verkar stämma i varje cirkel. Låt oss notera den omskrivna cirkelns diameter med d , den minsta cirkelns diameter med x och den andra cirkelns diameter med $d - x$ ”.

Sedan genomför man den ovan beskrivna allmänna lösningen.

Svar: Den stora halvcirkelns längd är lika med summan av de två inskriva halvcirklarnas längder.

A-priori analys av matematiska förmågor under problemlösningsprocessen

1) förmågan att *insamla* och *formalisera matematisk information*

Manifest innehåll: eleven bestämmer, genom att rita, notera, tala eller på annat sätt yttra sig, relationer mellan storheter och variabler. Eleven använder numeriska värden, muntliga yttranden eller symboliska notationer för att ange samband mellan cirklarnas diameter.

Latent innehåll: det som inte kan observeras i skrift eller i muntliga yttranden, t.ex. elevens tankeverksamhet när eleven är tyst utan att redogöra för sina antaganden.

2) förmågan att *bearbeta matematisk information*

Manifest innehåll: eleven använder formeln för cirkelns omkrets för att beräkna cirklarnas omkrets och halvcirklarnas längder. Eleven utför matematiska operationer med hjälp av siffror och symboler. Eleven hoppar över steg i beräkningar för att förkorta resonemanget; t.ex. eleven dividerar inte cirklarnas omkrets med 2 för att beräkna halvcirklarnas längder. Eleven kontrollerar om beräkningarna stämmer.

Latent innehåll: det som inte kan observeras i skrift eller i muntliga yttranden, t.ex. om eleven har svårt att genomföra beräkningarna utan att förklara varför eller om eleven utför beräkningar endast i huvudet.

3) förmågan att *generalisera matematisk information*

Manifest innehåll: eleven använder de numeriska beräkningarna för halvcirklarnas längder för att inse att förhållandet mellan halvcirklarnas längder alltid stämmer. Efter det noterar eleven cirklarnas diameter med symboler och visar att förhållandet mellan halvcirklarnas längder stämmer även i det allmänna fallet.

Latent innehåll: det som inte kan observeras i skrift eller i muntliga yttranden, t.ex. varför eleven inte klarar av att dra slutsatser från numeriska beräkningar för att inse att förhållandet mellan halvcirklarnas längder alltid stämmer.

4) förmågan att *minnas matematisk information*

Manifest innehåll: eleven yttrar sig om att det givna problemet påminner om ett annat problem eller en generell problemtyp. Eleven använder generaliserade lösningsmetoder, t.ex. bestämmer sig att använda ekvationer och likheter under lösningsprocessen. Eleven kommer ihåg den korrekta formeln för cirkelns omkrets, eleven kommer ihåg lösningsmetoder för ekvationer och olikheter.

Latent innehåll: det som inte kan observeras i skrift eller i muntliga yttranden, t.ex. varför eleven inte associerar det givna problemet till något annat problem eller varför eleven inte kommer ihåg formeln för cirkelns omkrets och lösningsmetoder för ekvationer och olikheter.

A-priori analys av Problem 2

Maria och Peter vill köpa en cd-skiva. I affären inser de att Maria har 24 kr mindre och Peter 2 kr mindre än vad skivan kostar. Även när de lägger ihop sina pengar, så räcker inte pengarna för att kunna köpa cd-skivan.

Hur mycket kostar cd-skivan och hur mycket pengar har Maria respektive Peter?

Lösning av Problem 2

Uppgiften kan lösas huvudsakligen på två kvalitativt skilda sätt.

Lösning I – det allmänna fallet

Notera skivans pris med x

Marias pengar = $x - 24$

Peters pengar = $x - 2$

Summan av Marias och Peters pengar $(x - 24) + (x - 2) = 2x - 26$

Förhållandet mellan deras pengar och skivans pris är $2x - 26 < x$, vilket leder till $x < 26$, dvs. att skivan kostar mindre än 26 kr.

Nu har vi fått sambanden

$x < 26$, Marias pengar < 2 och Peters pengar < 24 .

Följaktligen gäller att

$24 < x < 26$, Marias pengar $= x - 24$ och Peters pengar $= x - 2$.

Svar: Skivan kostar mellan 24 och 26 kr, Maria har 24 kr mindre och Peter har 2 kr mindre än vad skivan kostar. På grund av att skivans pris kan uttryckas i kronor och ören, så skulle det kunna finnas det ett stort antal möjliga lösningar; t.ex. om skivan kostar 25,90 kr, så skulle Maria ha 1,90 kr och Peter 23,90 kr. Men eftersom öresmynt inte längre används, så måste Marias och Peters pengar uttryckas i hela kronor. Det enda möjliga heltalsvärde för skivans pris är 25 kr. I så fall har Maria 1 kr och Peter 23 kr.

Lösning II – numerisk ansats som leder till det allmänna fallet

Testar om skivans pris är t.ex. 100 kr

Marias pengar $= 100 - 24 = 76$ kr

Peters pengar $= 100 - 2 = 98$ kr

Summan av Marias och Peters pengar $76 + 98 = 174$ kr, dvs. mer än vad skivan kostar.

Testar med ett nytt värde för skivans pris, t.ex. 50 kr, och inser att summan av Marias och Peters pengar är fortfarande större än skivans pris.

Genom att upprepa metoden, kommer man fram till att skivans pris är 25 kr.

Sedan genomför man den allmänna lösningen (beskriven vid Lösning I) för att visa att skivans pris ligger mellan 24 och 26 kr, Maria har 24 kr mindre och Peter har 2 kr mindre än vad skivan kostar.

Svar: Skivan kostar mellan 24 och 26 kr, Maria har 24 kr mindre och Peter har 2 kr mindre än vad skivan kostar. På grund av att skivans pris kan uttryckas i kronor och ören, så skulle det kunna finnas det ett stort antal möjliga lösningar; t.ex. om skivan kostar 25,90 kr, så skulle Maria ha 1,90 kr och Peter 23,90 kr. Men eftersom öresmynt inte längre används, så måste Marias och Peters pengar uttryckas i hela kronor. Det enda möjliga heltalsvärde för skivans pris är 25 kr. I så fall har Maria 1 kr och Peter 23 kr.

A-priori analys av matematiska förmågor under problemlösningsprocessen

1) förmågan att *insamla* och *formalisera* matematisk information

Manifest innehåll: eleven genom att rita, notera, tala eller på annat sätt yttra sig bestämmer relationer mellan storheter och variabler. Eleven använder

numeriska värden, muntliga yttranden eller symboliska notationer för att ange samband mellan skivans pris, Marias pengar och Peters pengar.

Latent innehåll: det som inte kan observeras i skrift eller i muntliga yttranden, t.ex. elevens tankeverksamhet när eleven är tyst utan att redogöra för sina antaganden.

2) förmågan att *bearbeta matematisk information*

Manifest innehåll: eleven använder ekvationer och olikheter för att beräkna vad skivan kostar samt hur mycket pengar Maria respektive Peter har. Eleven använder lösningsmetoder för ekvationer och olikheter. Eleven utför matematiska operationer med hjälp av siffror och symboler. Eleven redogör med hjälp av logiskt och systematiskt resonemang vad skivans pris är. Därefter bestämmer eleven värdet för Marias respektive Peters pengar. Eleven kontrollerar om beräkningarna stämmer.

Latent innehåll: det som inte kan observeras i skrift eller i muntliga yttranden, t.ex. om eleven har svårt att genomföra beräkningarna utan att förklara varför, om eleven endast utför beräkningar i huvudet eller om eleven blir osäker när den ska lösa ekvationer som leder till olikheter.

3) förmågan att *generalisera matematiska samband*

Manifest innehåll: eleven testar olika numeriska beräkningar för att bestämma skivans pris och generaliserar sedan dessa beräkningar genom att beräkna skivans pris i det allmänna fallet. Efter det visar eleven att skivan kostar mellan 24 och 26 kr.

Latent innehåll: det som inte kan observeras i skrift eller i muntliga yttranden, t.ex. varför eleven inte klarar av att dra slutsatsen från numeriska beräkningar att skivan kostar mellan 24 och 26 kr eller varför eleven drar slutsatsen att skivans pris är 25 kr endast på grund av numeriska beräkningar.

4) förmågan att *minnas matematisk information*

Manifest innehåll: eleven yttrar sig om att det givna problemet påminner om ett annat problem eller en generell problemtyp. Eleven använder generaliserade lösningsmetoder, t.ex. bestämmer sig för att lösa uppgiften med hjälp av ekvationer och olikheter. Eleven kommer ihåg lösningsmetoder för ekvationer och olikheter.

Latent innehåll: det som inte kan observeras i skrift eller i muntliga yttranden, t.ex. varför eleven inte associerar det givna problemet till något annat problem eller varför eleven inte kommer ihåg lösningsmetoder för ekvationer och olikheter.

Observationsanalys

Observationen gav två olika datamängder som beskriver samma företeelse: dels den *digitala inspelningen* av elevernas lösningar och dels *ljudupptagningarna* under lösningsprocessen. Båda slagen av inspelningar var av hög kvalitet. Den digitala inspelningen resulterade i en exakt linjär återgivning av elevernas skriftliga lösningar. Ljudupptagningarna transkriberades med exakt ordalydelse, där samtliga ljud, såsom stakningar, upprepningar och hummanden inkluderades. Jag använde den typen av transkribering med tanke på att eleverna är ovana vid att muntligt reflektera över sina egna lösningsmetoder och jag ville fånga varje muntligt uttryck hos dem. I de transkriberade textfilerna angav jag tidsmarkörer för varje minut, i den digitala datamängden är varje händelse automatiskt kopplad till en exakt tidpunkt, som uttrycks med sekunders noggrannhet.

Syftet med min analys var dels att identifiera matematiska förmågor så som Krutetskii (1976) har definierat dem, dels att undersöka interaktionen mellan dessa förmågor. I den nämnda interaktionen hade jag särskilt fokus på det matematiska minnets roll i problemlösningsprocessen.

Innehållsanalys kan göras på olika abstraktionsnivåer. Både den digitala inspelningen av elevernas lösningar och ljudupptagningarna analyserades med hjälp av *kvalitativ innehållsanalys* inspirerad av Graneheim och Lundman (2004) samt Kress och van Leeuwen (2001). Kvalitativ innehållsanalys handlar om att *identifiera, koda och kategorisera* grundläggande mönster i det empiriska innehållet. Analysmetoden innebar att den transkriberade texten lästes igenom noggrant flera gånger för att skapa en känsla för helheten. Efter att ha bekantat mig med texten, bröt jag ner den i *meningsbärande enheter*. De meningsbärande enheterna bestod av ord och meningar med samma inbördes innehåll, relaterade till Krutetskii's (1976) beskrivning av de matematiska förmågor som jag valde att identifiera under problemlösningen.

Enheterna noterades med exakta tidsmarkeringar. För att korta ner texten men ändå behålla innehållet, reducerades dessa enheter till *kondenserade enheter*. Därefter kodades och sorterades de kondenserade enheterna i *kategorier* som motsvarar respektive matematiska förmågor.

Analysmetoden synliggjorde de förmågor och faser som direkt uttrycktes i texten, dvs. det *manifesta innehållet* i observationen. Efter att jag hade tillgång till det manifesta innehållet, analyserade jag även det *latenta innehållet* i det empiriska materialet. Det latenta innehållet analyserades med hjälp av min tolkning av all tillgänglig material, efter att ha sammanfört datamängder från observationer och efterföljande intervjuer. Analysen av det latenta innehållet beskrivs närmare i nästa avsnitt.

Härnäst kommer jag, för överskådlighetens skull, att exemplifiera min analys med data som i olika former är kopplad till elev X3. Observationsanalysen kommer jag att tydliggöra med hjälp av datamängden som samlades in mel-

lan tiden 0.30 och 1.40 under lösningen av Problem 1. De generella matematiska förmågorna är kodade enligt följande:

- 1 betyder förmågan att *insamla och formalisera matematisk information*,
- 2 betyder förmågan att *bearbeta matematisk information*,
- 3 betyder förmågan att *generalisera matematiska samband* och
- 4 står för förmågan att *minnas matematisk information*.

Först analyserade jag den transkriberade ljudfilen enligt följande modell.

Tid	Transkription – X3	Matematisk förmåga manifest innehåll
0.30	X3: Alltså eh. Just ja, här kommer vi ju att bara använda vilken radie dom har och sådant. Man skulle ...	1 eller 4
0.43	O: Du kan rita av det igen om det känns tryggare för dig, så gör precis som du vill.	
0.55	X3: Basicly det vi försöker få fram, är... Om jag har ... Om vi har en diameter och så ... Är det ju ... Om pi gånger diametern, är detsamma som pi gånger typ diametern minus den där längden minus x. Och så sedan, plus pi gånger x.	1 eller 4
1.40		

Efter ovanstående analys kunde jag inte entydigt koppla de identifierade meningsbärande enheterna till någon enskild matematisk förmåga eller fas; det var omöjligt att endast med hjälp av den transkriberade texten göra en sådan koppling.

I nästa steg analyserade jag elevernas digitalt inspelade anteckningar. De kondenserade enheterna noterades med exakta tidsmarkeringar och kategoriserades. Det som elev X3 noterade under tidsperioden 0.30 och 1.40 följer nedan. Mina kommentarer och observationer är kursiverade i tabellen.

Tid	Digitalt inspelad lösning – X3	Matematisk förmåga manifest innehåll
0.45	<i>ritar tre halvcirklar enligt uppgiftstexten</i>	1
1.00	πd	1 eller 4
1.08	$\pi ($	1 eller 4
1.11 1.40	$d - x) - \pi x$	1

Efter den här analysen kunde jag inte entydigt koppla de meningsbärande enheterna vid 1.00 och vid 1.08 till någon av de två observerade matematiska förmågorna.

Till en början analyserade jag den transkriberade texten och de inspelade lösningarna var för sig. Analysen innebar att jag hade studerat två olika texter som beskrev samma observation. Detta medförde att en övervägande del av de meningsbärande enheterna kunde kopplas till matematiska förmågor men vid analysens slutfas fanns det fortfarande enheter som jag hade svårt att identifiera på ett entydigt sätt.

För att på ett bättre sätt kartlägga materialet beslutade jag att sammanföra de två analyserna där olika modaliteter samverkade. Detta resulterade i en bättre förståelse av elevens agerande. De sammanförda texterna under tidsperioden 0.30 och 1.40 följer nedan. Informationen i tabellen ska tolkas på följande sätt: det som står under rubriken Digitalt inspelad lösning är en redovisning av det elever har skrivit eller ritat under problemlösningen, under rubriken Transkription finns det utdrag från den transkriberade ljudfilen och mina kommentarer är kursiverade.

Tid	Digitalt inspelad lösning	Transkription – X3	Matematisk förmåga manifest innehåll
0.30		X3: Alltså eh. Just ja, här kommer vi ju att bara använda vilken radie dom har och sådant. Man skulle...	1 eller 4
0.45	<i>ritar tre halvcirklar enligt uppgiftstexten</i>		1

0.55		X3: Basicly det vi försöker få fram, är... Om jag har ... Om vi har en diameter och så ... Är det ju ...	1
1.00	πd	<i>eleven kommer ihåg formeln för cirkelns omkrets</i>	4
1.08	$\pi ($		1 eller 4
1.11	$d - x) - \pi x$	X3: Om pi gånger diametern, är detsamma som pi gånger typ diametern minus den där längden minus x. Och så sedan, plus pi gånger x.	1
1.40			

Ovanstående exempel visar hur de sammanförda modaliteterna möjliggjorde en identifiering av de meningsbärande enheterna som dyker upp vid 0.45, 0.55 och 1.00 samt enheten mellan 1.11 och 1.40. Problemet var naturligtvis att det manifesta innehållet vid 0.30 respektive 1.08 fortfarande inte kunde entydigt kopplas till någon matematisk förmåga. Dessutom upptäckte jag att eleven säger ”plus ... pi gånger x” men skriver ” $-\pi x$ ”, vilket naturligtvis kunde ha påverkat nästa steg i problemlösningsprocessen.

En annan intressant aspekt är att eleven vid 0.55 skiftar mellan ”vi” och ”jag”, när hon säger ”Basicly det vi försöker få fram, är... Om jag har ... Om vi har en diameter och så ...”. Det verkar som att när hon ska lösa uppgiften, blir hon medveten om att lösningsprocessen måste motiveras och då skiftar hon från ”jag” till den, i matematiska sammanhang ofta använda, tilltalsformen ”vi”. Observationen tyder på att elever pratar på ett sätt som det förväntas av dem i matematiska sammanhang: matematiker tolkar världen med tilltalsformen *vi* eftersom matematiska resultat är universella.

För att få en bättre förståelse av hur de studerade enheterna kunde kopplas till Krutetskiis (1976) matematiska förmågor, analyserade jag i nästa steg även intervjuerna som genomfördes i anslutning till observationerna.

Analys av efterföljande intervjuer

Även dessa inspelningar var av hög kvalitet och ljudupptagningarna transkriberades med exakt ordalydelse framförallt med tanke på att eleverna är ovana att muntligt reflektera över matematisk problemlösning. I de transkriberade texterna angavs inga tidsmarkörer, eftersom tidsaspekten i dessa intervjuer var ointressant med avseende på problemlösningsprocessen; intervjuernas innehåll kunde endast på ett logiskt sätt kopplas till observationerna.

De strukturerade intervjuerna genomfördes direkt efter observationen; intervjuerna fokuserade elevernas upplevelser och tankar i samband med problemlösningen. Det huvudsakliga syftet med intervjuerna var att kartlägga det matematiska minnets förekomst under problemlösningen.

Även intervjuerna analyserades med hjälp av *kvalitativ innehållsanalys*. Under analysen försökte jag inta en attityd av kritisk öppenhet, genom att kontinuerligt reflektera över på vilket sätt min förförståelse styr analysarbetet. Identifieringen och kategoriseringen av *meningsbärande enheter* som relaterade till Krutetskiis (1976) beskrivning av matematiska förmågor och faser tjänade studiens syfte i flera avseenden.

Analysen visar att ingen av eleverna kunde minnas att de tidigare har sett problemen som de skulle lösa. På det sättet uppfyllde de valda uppgifterna kriterierna av att vara nya, utmanande problem som inte är av standardkaraktär – vilket var en nyckelfråga vid studiens utformning.

Men intervjuanalysen hjälpte mig även i ett annat viktigt avseende; att analysera det *latenta innehållet* i det empiriska materialet. Efter att ha sammanfört datamängder från observationer och efterföljande intervjuer blev det möjligt att koppla även sådana meningsbärande enheter till matematiska förmågor som efter observationsanalysen var fortfarande tveksamma.

För att illustrera hur jag tolkade det latenta innehållet från observationerna med hjälp av all tillgänglig material, exemplifierar jag med delar av den direkt efterföljande intervjun med elev X3. Intervjumaterialet kunde kopplas till de sammanförda texterna från observationsanalysen vid tidsperioden 0.30 till 1.40.

X3: Eftersom att det är det de har gemensamt. Om jag kollar på det, så ser jag, så, jag ser en massa cirkelbågar som står över på samma sträcka. Den här sträckan är det de har gemensamt.

O: Mm.

X3: Och då uttrycker man det helt enkelt som att, ja, man uttrycker deras olika diametrar som någonting av varandra.

O: Ja.

X3: Det liknar en annan uppgift som jag gillar väldigt mycket så...

O: Jaha.

X3: En triangel...

O: Så det var, det liknade en uppgift med trianglar.

X3: Precis.

O: Okey.

X3: Det är lite samma sak där, man måste, man måste kolla vad dom har för sidor gemensamt.

Sedan, när X3 sammanfattar sina upplevelser i samband med problemlösningen, fortsätter hon att relatera Problem 1 till uppgiften som hon nyligen beskrev, men hon medger att uppgifterna inte är så lika.

X3: Eh jag har inte sett dom. Jag vet cirkelbågarna, jag har sett liknande uppgifter med. Fast jag tror, ja, inte bara den, utan någon annan med cirkelbågar, men jag har aldrig liksom...

O: Nej.

X3: ... haft just dom.

O: Och det var intressant att du just tänkte just på det där med triangel.

X3: Mm, jag vet, alltså dom är ju egentligen inte så lika. Det är bara det att jag får samma tankegång när jag ser den där. Eftersom att ...

O: När du ser den rätvinkliga triangeln.

X3: Precis, om man löser den där, det första man gör då, det är ju att man gör upp formler för...

O: Mm.

X3: ... hur olika trianglar och kvadrater, insidan av den ser ut.

O: Ja.

X3: Precis som där, om man uttrycker olika sidor genom och ta, en sida minus andra, precis som i den...

Intervjun ledde till att det manifesta innehållet vid 0.30 kunde kompletteras med elevens uttalande "Eftersom att det är det de har gemensamt. Om jag kollar på det, så ser jag, så, jag ser en massa cirkelbågar som står över på samma sträcka. Den här sträckan är det de har gemensamt".

På så sätt bekräftades mitt antagande att när eleven ritade cirkelbågar, så upptäckte hon den formella strukturen i problemet, dvs. hon använde sin förmåga att *insamla* och *formalisera matematisk information* (förmåga 1).

Det matematiska minnet identifierades med hjälp av det latent innehåll. Hennes nästa uttalande "Det liknar en annan uppgift som jag gillar väldigt mycket" vittnar om ett minne för generaliseringar, dvs. ett semantiskt minne – på så sätt tolkade jag att även förmågan att *minnas matematisk information* (förmåga 4) var närvarande i den aktuella enheten. Därmed bekräftades Kru-tetskiis (1976) antagande, att det matematiska minnet är ständigt närvarande i fasen när elever samlar in matematisk information.

Efter intervjuanalysen kunde jag identifiera det matematiska minnets närvaro även i den meningsbärande enheten vid 1.08. I analysen av det digitala materialet noterade jag att eleven stannade upp i sitt skrivande och var tyst i ett par sekunder. Frågan var naturligtvis vad eleven tänkte på under den tiden.

Mitt antagande efter den föregående analysen var att hon antingen *samlade in* och *formaliserade matematisk information* (förmåga 1) eller att hon försökte *minnas matematisk information* (förmåga 4) för att kunna lösa uppgiften.

Hennes uttalande

X3: Och då uttrycker man det helt enkelt som att, ja, man uttrycker deras olika diametrar som någonting av varandra.

i samband med att hon något senare påpekar att

X3: Mm, jag vet, alltså dom är ju egentligen inte så lika. Det är bara det att jag får samma tankegång när jag ser den där.

tyder på att hon relaterar det givna problemet till en liknande uppgift.

Och i nästa steg förklarar hon hur sådana problem ska lösas:

X3: Precis som där, om man uttrycker olika sidor genom och ta, en sida minus andra, precis som i den...

När hon fortsätter relatera till uppgiften som hon minns, bekräftas antagandet att det handlar om ett generaliserande minne, dvs. förmågan att *minnas matematisk information* (förmåga 4), eftersom uppgiften som hon relaterar till handlar om att beräkna sidan av en kvadrat som är inskriven i en triangel. En uppgift som har en annorlunda kontext. Men det är lösningsmetoden som hon minns när hon löser det aktuella problemet – inte kontext och konkreta siffror – vilket är helt i linje med definitionen av *matematiskt minne*. Även tidslängden, dvs. att det tar så pass lång tid som 3 sekunder innan hon fortsätter med skrivandet, vittnar om att det inte är procedurminnet som används. Automatiserade processer förs över till arbetsminnet blixtn snabbt, utan att belasta det, medan semantiska minnen tar längre tid att aktualisera (Ingvar, 2009b).

Följaktligen kunde jag koppla de meningsbärande enheterna i den nämnda fasen på följande sätt, mina kommentarer och observationer är kursiverade i tabellen:

Tid	Digitalt inspelad lösning	Transkription – X3	Förmåga
0.22		<i>tystnad</i> intervju: X3: Det jag såg först och främst, när jag kollar på uppgiften, det första jag ser är ju att jag måste kolla på diametrarna. X3: Det liknar en annan uppgift som jag gillar väldigt mycket så...	1, 4

0.30		X3: Just ja här kommer vi ju och bara använda, vilken radie den har. Man skulle... intervju: X3: Eftersom att det är det dom har gemensamt, om jag kollar på det så ser jag, så, jag ser en massa cirkelbågar som står över på samma sträcka, den här sträckan är det dom har gemensamt.	1, 4
0.45	<i>ritar tre halvcirklar</i>		1
0.55		X3: Basicly det vi försöker få fram, är... Om jag har ... Om vi har en diameter och så ... Är det ju...	1
1.00	πd	<i>eleven kommer ihåg formeln för cirkeln omkrets</i>	4
1.08	$\pi ($	intervju: X3: Och då uttrycker man det helt enkelt som att, ja, man uttrycker deras olika diametrar som någonting av varandra. X3: Precis, om man löser den där, det första man gör då, det är ju att man gör upp formler för ... hur olika trianglar och kvadrater, insidan av den ser ut. X3: Precis som där, om man uttrycker olika sidor genom och ta, en sida minus andra, precis som i den...	4
1.11	$d - x) - \pi x$	X3: Om pi gånger diametern, är det-samma som pi gånger typ diametern minus, den där längden, minus x. Och så sedan, plus pi gånger x.	1
1.40		intervju: X3: Och så är det bara att komma på någon liten fin formel med en massa bokstäver.	

Exemplet visar hur de meningsbärande enheterna kopplades till de studerade matematiska förmågorna. Vid några enheter var det omöjligt att entydigt

identifiera och därmed isolera det manifesta innehållet. Det resulterade i att dessa enheter noteras med båda närvarande förmågorna, som t.ex. enheterna vid 0.22 respektive 0.30.

Efter analysens genomförande, har jag både kvalitativt och kvantitativt sammanställt de mönster som trädde fram under analysprocessen. En sammanfattande och mera detaljerad diskussion av de identifierade mönstren följer i avsnittet som behandlar studiens resultat.

Analysens reliabilitet

Eftersom jag har genomfört analysen av det empiriska materialet på egen hand, ville jag med hjälp av en utomstående bedömare testa processens reliabilitet, dvs. att min analys håller en godtagbar nivå av tillförlitlighet. Kontrollen skedde i samarbete med en universitetslektor i matematikdidaktik, som i det här fallet antog rollen som utomstående bedömare. Lektorn kontrollerade en sjättedel av det totala empiriska materialet, i det här fallet båda problemlösningsprocesserna som hörde till en slumpmässigt utvald elev. I den analysen använde universitetslektorn samma analysmall – innehållande Krutetskiis (1976) matematiska förmågor – som jag har använt. Reliabilitetskontrollen resulterade i att den utomstående bedömannen och jag hade samma uppfattning om de observerade förmågorna vid 27 av de totalt jämförda 29 meningsbärande enheterna. Den höga andelen överensstämmande uppfattningar om identifierade matematiska förmågor indikerar att analysen av det empiriska materialet har en godtagbar nivå av reliabilitet.

Resultat

Analysen har lett till information av två olika slag om matematiska förmågors interaktion och det matematiska minnets roll i problemlösningsprocessen: *kvantitativa* respektive *kvalitativa* resultat. Inledningsvis kommer jag att redovisa resultaten som gäller de matematiska förmågornas interaktion, efter det kommer jag att redogöra för det matematiska minnets roll i processen.

Matematiska förmågors interaktion vid problemlösning av nya matematiska problem

Gemensamma faser i problemlösningen

Innan jag presenterar kvantitativa data som analysen har resulterat i, ska jag redovisa de observationer som har lagt grunden till den kvantifierade redovisningen. Efter att ha analyserat det empiriska materialet av elevernas matematiska aktiviteter, kunde jag upptäcka några generella mönster i datamängden. Den första generella observationen är att elevernas aktiviteter framförallt består av tre huvudsakliga faser och att dessa faser följer en bestämd kronologisk ordning.

1. Varje problemlösningsaktivitet inleds med fasen där både förmågan att *insamla och formalisera matematisk information* (förmåga 1) samt förmågan att *minnas matematisk information* (förmåga 4) är närvarande. Dessa två förmågor är oftast så intimt förknippade med varandra att det är mycket problematiskt att bestämma ordningsföljden mellan dem.

I föregående avsnitt har jag redan visat hur dessa två förmågor i den inledande fasen samverkar hos elev X3, härnäst exemplifierar jag med den inledande fasen hos elev X6 vid lösning av Problem 1:

Tid	Digitalt inspelad lösning	Transkription – X6	Förmåga
0.10		<i>eleven är tyst</i> intervju: O: Och då tänkte du, vad tänkte du först på? X6: Eh ... hur man räknade ut arean av sådana här figurer. O: Omkretsen. X6: Ja, omkretsen, jag menar omkretsen.	1, 4

		X6: Ja, om man kunde se något samband, typ. X6: Ja, jag behövde en om... Alltså gemensam variabel, eller variabel. <i>eleven samlar in information och försöker minnas tidigare problemtyper</i>	
0.25		X6: Aha, det här är den stora. X6: Och dens längd alltså, dens längd, så var dess ... omkrets.	1
0.48		X6: Omkretsen är runt det hela.	4
0.54		X6: Ehm, ok ...	1, 4
1.22		X6: Hur räknade man omkretsen? <i>eleven försöker minnas hur man beräknar cirkelns omkrets</i>	4
1.30	$d \cdot \pi$	<i>hon frågar mig om formeln för omkretsen är korrekt, jag svarar</i>	
1.35 1.50		X6: Då är den här en viss diameter. X6: Den, om den har x i diameter, stora alltså... Den har x . intervju: X6: Jag såg inte hur dom skulle kunna, ja jag såg inte det där...	1

Troligen sker det en parallell bearbetning i arbetsminnet, där förmågan att *insamla* och *formalisera matematisk information* (förmåga 1) påverkas av tidigare generaliseringar, dvs. av förmågan att *minnas matematisk information* (förmåga 4). Enligt den biologiska modellen pågår en kontinuerlig och cyklisk process i arbetsminnet, vars syfte är att upptäcka och vid behov förnya kunskap (Ingvar, 2009a). Därmed bekräftas Krutetskiis (1976) observation att dessa två förmågor interagerar på ett intensivt sätt under problemlösningens inledningsfas. Men analysen stämmer framförallt överens med den biologiska modellen för hantering av ny information: hjärnbarkens (där arbetsminnet är placerat) huvudsakliga uppgift är att bemöta all ny information i förhållande till tidigare kunskaper och erfarenheter (Ingvar, 2009a). Processen gör att vi snabbare, men samtidigt på ett mindre objektivt sätt kan hantera ny information – som i det här fallet kontexten för det nya matematiska problemet. Den biologiska modellens nyansrikedom och parallella struktur

får tjäna som förklaring till svårigheterna som dök upp när jag försökte skilja på dessa två förmågor under problemlösningens inledande fas.

2. Direkt efter den inledande fasen följer en fas där förmågan att *bearbeta matematisk information* (förmåga 2) blir framträdande. Under den här fasen har jag noterat att de flesta komponenterna av den nämnda förmågan är närvarande, såsom: *logiskt tänkande*, *systematiskt* och *sekventiellt tänkande*, *flexibilitet i tänkandet* samt en *strävan* efter att *förenkla* och *förkorta resonemanget* i problemlösningen.

För att exemplifiera detta kan vi följa aktiviteten hos elev X5, som använder en allmän lösningsmetod för att lösa Problem 2.

Tid	Digitalt inspelad lösning	Transkription – X5	Förmåga
1.22	Maria = $x - 24$ Peter = $x - 2$	<i>eleven uttalar högt det han skriver i cellen till vänster</i>	1
1.42	$(x - 24) + (x - 2)$ $= 2x - 26 = ? < x$	intervju: X5: Alltså det, det kändes som det blev jobbigt för jag fick ingen, jag fick inget så här, på ena sidan fick jag inget konkret kändes det som. Det känns jobbigt och, att räkna om man bara har en, liksom att, man vet att det blir mindre än x . X5: Så det är inte ... det är ingen ekvation egentligen. <i>eleven blir osäker på vilken symbol han ska använda eftersom ekvationerna leder till en olikhet</i>	2
2.25		<i>eleven frågar mig om notationer och symboler, sedan resonerar han högt och skriver samtidigt</i>	
2.35	Maria < 2 24 – 25,99 24 < x < 26	X5: Men, jaha, för det känns som om Maria har 24 kronor mindre och Peter har 2 kronor mindre än vad skivan kostar och även om dom lägger ihop sina pengar, det betyder ju att Maria inte kan ha mer än 2 kronor. Eftersom hon inte ens kunde lägga ihop till Peters 2 kronor så Maria har mindre än 2 kronor.	2

3.50		X5: Alltså kan cd-skivan kosta mellan 24 till kanske 25,99. X5: Den får kosta mellan 24 och ... Den får inte kosta 26, den måste kosta ... 26 är större än x, och x är större än 24. intervju: X5: Problemet är att jag vet ju fortfarande inte vad x är, jag vet bara vad x inte får vara.	
------	--	---	--

Efter en förhållandevis lång inledande fas, där förmåga 1 och förmåga 4 interagerar och kompletterar varandra, väljer X2 att använda en numerisk metod för att lösa Problem 2. Det som följer presenteras härnäst:

Tid	Digitalt inspelad lösning	Transkription – X2	Förmåga
9.05		X2: Men okey, om jag tänker att jag bara liksom ... det är 24 kronor.	1
9.12		X2: Bara för och se klarhet i det här så skulle jag, alltså sätta en testsiffra liksom. intervju: X2: Det är klart ... alltså det här har jag ju gjort förut, ställt upp så här för och se sambanden. Och sedan när jag gjort det här också så har jag gjort testsiffror eller helt, och ibland så lyckas jag komma fram till svaret genom det här.	1, 4
9.35	skivan: 50kr Maria: 26 kr Peter: 48 kr skivan: 100 kr Maria: 76 kr	X2: Fast om de lägger ihop sina pengar då, då blir det ... intervju: X2: Och sedan försöker jag lösa det, genom och veta dom här siff-	2

	Peter: 98 kr	rorna och se hur man kan komma fram med dom här. Så brukar jag göra ofta.	
10.42	26 + 48 76 + 98	X2: Och då blir det ju, vänta. <i>eleven använder räknaren för att addera Marias respektive Peters pengar och upptäcker att de i båda fallen har mer pengar än vad skivan kostar</i>	2
11.20 12.01	skivan: 25 kr Maria: 1 kr Peter: 23 kr	X2: Då borde ju skivan kanske kosta mindre ... så vi testar ...	2

Exemplet visar att eleven, efter att ha bestämt sig för en lösningsmetod – i det här fallet en numerisk metod – genomför de planerade beräkningarna i en sekventiell och logisk följd, dvs. han använder sin förmåga att *bearbeta matematisk information* (förmåga 2).

Det förefaller vara logiskt att efter en inledande fas av insamling och formalisering, börjar eleverna att bearbeta den formaliserade informationen. Att många komponenter av förmågan att *bearbeta matematisk information* är närvarande under den här fasen vittnar om förmågans komplexa karaktär: logiskt, systematiskt och sekventiellt tänkande samt flexibilitet i tänkandet är förmågor som är både intimt och traditionellt förknippade med matematisk problemlösning.

3. Varje problemlösningsaktivitet avslutas med en fas där eleverna återigen visar prov på några komponenter av förmågan att *bearbeta matematisk information* (förmåga 2). I det här skedet kontrollerar de sina valda metoder genom återaktualisering av problemets förutsättningar, aktiviteten avslutas sedan med någon form av kontrollräkning.

För att exemplifiera detta kan vi titta på den avslutande aktiviteten hos elev X3.

Tid	Digitalt inspelad lösning	Transkription – X3	Förmåga
4.38		X3: Vi vet att det skall gå att ta bort 24 kr, för Maria har pengar.	2
4.52	1 25	X3: Hon har faktiskt en krona. X3: Skivan kostar 25.	2

	23	X3: Peter har 23.	
5.24 5.30		X3: Det stämmer, 25 är mindre än 26.	2

I ovanstående exempel ser vi att hon kontrollerar det erhållna resultatet med hjälp av problemets förutsättningar, dvs. att Maria har pengar och dessutom 24 kr mindre än vad skivan kostar. Sedan levererar hon en korrekt heltalslösning. Noteras bör att hon gör samma sak i den avslutande fasen av lösningen av Problem 1. Även i det fallet kontrollräknar (förmåga 2) hon det erhållna resultatet med hjälp av olika numeriska värden.

Ytterligare exempel på den avslutande fasen kan identifieras i X2:s agerande, när eleven använder räknaren för att testa sin lösning.

Tid	Digitalt inspelad lösning	Transkription – X2	Förmåga
12.01		X2: Det skulle det ju kunna vara... Så då kan man ju testa, att sätta in den här formeln som jag gjorde.	2
12.10	$c = 25$ $x = 1$ $y = 23$	<i>eleven prövar, med hjälp av räknaren, de erhållna lösningarna i de ursprungliga ekvationerna</i>	2
12.40 12.50		X2: Ja vi har fått rätt svar, men nu löste jag det ju med alltså testa sig fram.	2

Noteras bör att eleven är osäker på om den valda metoden (som är en numerisk metod) gav önskat resultat, trots att prövningen visar att resultatet är användbart.

Sammanfattningsvis kan jag notera att varje problemlösningsaktivitet börjar med en fas där två förmågor samverkar: förmågan att *insamla och formalisera matematisk information* (förmåga 1) samt förmågan att *minnas matematisk information* (förmåga 4). Den inledande fasen följs direkt av en fas där förmågan att *bearbeta matematisk information* (förmåga 2) dominerar. Och varje problemlösningsaktivitet avslutas med en fas där någon komponent av förmågan att *bearbeta matematisk information* (förmåga 2) är närvarande. Den sista fasen innehåller oftast en aktivitet där eleven kontrollerar sina resultat. Utöver dessa tre faser interagerar de observerade förmågorna, på ett mer oregelbundet sätt, i olika konstellationer.

Förmågan att generalisera matematiska samband kunde inte identifieras

Problemens konstruktion medförde att det var möjligt för eleverna att under problemlösningen generalisera numeriska resultat. Av de totalt 12 observerade matematiska aktiviteterna (6 elever löste 2 uppgifter) var det 5 som innehöll numeriska metoder och som därmed kunde leda till en sådan generalisering. De resterande 7 aktiviteterna innehöll allmänna lösningsmetoder, där – på grund av det algebraiska angreppssättet – det inte fanns några numeriska resultat som var möjliga att generalisera.

Den, i a-priori analysen, identifierade och förväntade lösningsmetoden, där en numerisk ansats leder till lösning i det allmänna fallet, uteblev helt från elevernas problemlösning. Detta trots att jag vid slutet av varje numerisk problemlösningsprocess ställde frågan om eleven kunde generalisera det erhållna resultatet.

Följande utdrag från X2:s lösning av Problem 1 får exemplifiera hur ett sådant resonemang har gått till.

Tid	Digitalt inspelad lösning	Transkription – X2	Förmåga
4.52	$2,5 \cdot 3 = 7,5$ $7,5/2 = 3,75$	<i>eleven beräknar längder för olika sträckor</i>	2
5.37	$3,75 + 6,75 = 10,5$	X2: Får jag 10,5 ... så då är de väl lika stora då, tycker jag. O: Det verkar som att de är lika stora. X2: Ja. intervju: X2: Så jag satte dit egna siffror och så såg jag att dom var lika stora. X2: Fast det brukar jag göra på sidan av kladdpapperet på ett prov till exempel.	2
5.45		<i>när eleven är klar med lösningen, frågar jag efter en mer allmän lösning</i>	
5.48		O: Tror du att det här gäller för alla sådana här cirklar? X2: Hm ... alltså kanske, jag vet	

		inte. Jag har inte riktigt tänkt på det än om det gäller för alla. cirklar. O: Det vill säga om ... X2: Om det här skulle vara typ här ...	
6.00		<i>vi fortsätter att resonera om generella lösningsmetoder</i>	
6.30		O: Tänk om man skulle ändra proportionerna. Att det var ... Att den här lilla gick dit och den var så, eller om man flyttade på den här punkten där de inskrivna halvcirkelnarna vidrör, tangerar heter det, varandra i en punkt. X2: Eh, ja, men jag skulle, inte för att ... Jag vet inte riktigt hur jag ska säga det. Men jag tycker att, alltså det stämmer alltid. Jag vet inte hur jag ska bevisa det på något sätt om jag ska göra någon generell metod.	
7.15			

Vi noterar att eleven inte använder generella metoder för att visa resultatens giltighet. Analysen visade att ingen av eleverna som har använt numeriska metoder generaliserade de upptäckta resultaten. Följaktligen kunde jag, under denna studie, inte identifiera förmågan att *generalisera matematiska samband* (förmåga 3), dvs. förmågan att från ett eller flera specialfall kunna se allmängiltiga samband eller relationer.

I följande två avsnitt ska jag visa att förmågornas interaktion är beroende av hur pass framgångsrik den valda problemlösningsmetoden är.

Vad händer om den valda metoden inte leder till önskat resultat?

Analysen visar att eleverna blev mycket osäkra när den valda metoden för problemlösning inte ledde till önskat resultat. Den osäkerheten blev tydligast vid lösning av Problem 2, som innehöll både ekvationer (vars lösningar är bestämda tal) och olikheter (där lösningarna består av tal inom ett intervall).

Jag illustrerar detta inledningsvis med utdrag från analysen som hör till X1.

Tid	Digitalt inspelad lösning	Transkription – X1	Förmåga
4.47	$y + 2 - 24 = y - 22$ $x - 2 + x - 24 < x$ $2x - 26 < x$	X1: Vilket betyder att x måste vara mindre än 26. intervju: X1: Kanske tänkt att ja... Men det ska finnas nånstans med det här intervallet, så att om jag får fram det här svaret till andragradsekvationer, så kan inte det stämma.	2
5.55	$x - 13 < x$ <i>sedan stryker han över</i>		2
6.08	$x - 13 < x$		

Här ovan ser vi att eleven gör ett misstag vid olikhetens lösning – han dividerar inte med 2 i höger led – ett misstag som han upptäcker direkt efteråt. Sedan återgår han till fasen där han samlar in och formaliserar matematisk information; förmåga 1 används återigen fram till tiden 7.28.

Tid	Digitalt inspelad lösning	Transkription – X1	Förmåga
7.28	$x - 24 = \text{Maria}$ $x - 2 = \text{Peter}$ $x = \text{CD pris}$	X1: Skriver så att jag har allting samlat på ett snyggare sätt. intervju: X1: Sen samlar jag ihop allting på slutet när jag hade skaffat mig lite mer fakta. Och då blev det lite lättare att lösa ut.	1
7.57	$2x - 26 < x$		2
8.05		<i>eleven blir återigen osäker när ekvationerna leder till samma olikhet; eleven aktualiserar och formaliserar problemet en gång till</i>	1

9.35	$y + 22 = \text{Peter}$ $y = \text{Maria}$ $y + 24 = x$		1
10.10 10.44	$y + 22 + y > y + 24$ $2y + 22 > y + 24 -$	X1: Kommer fram till samma olikheter. <i>efter att eleven för tredje gången har kommit fram till samma olikhet, börjar eleven resonera logiskt och löser problemet</i>	2

Vi ser att förmågan att *insamla* och *formalisera matematisk information* (förmåga 1) följs av en fas där eleven *bearbetar matematisk information* (förmåga 2). När han återigen kommer fram till samma olikhet ($2x - 26 < x$) avbryter han bearbetningen för att återvända till problemets förutsättningar. I det skedet formaliserar han ännu en gång informationen. Eleven genomför pendlingen mellan förmåga 1 och förmåga 2 två gånger till under processen, båda tillfällena inträffar efter att han kommer fram till den nämnda olikheten. Till slut formulerar han den korrekta lösningen.

Elev X1:s sätt att skifta mellan och kompensera de olika komponenterna för den matematiska förmågan återfinns i någon form hos alla elever: när den valda lösningsmetoden inte ger förväntat resultat, slutar respektive elev att *bearbeta informationen* (förmåga 2) och återgår till fasen då *insamling* och *formalisering* (förmåga 1) interagerar. Efter att återigen ha insamlat och formaliserat informationen, börjar de med en ny *bearbetning* (förmåga 2).

Det intressanta är att *alla* elever blir osäkra vid motsvarande steg i lösningen av Problem 2, dvs. när formaliseringen leder till olikheter istället för de förväntade ekvationerna. Tre (X1, X3 och X5) av de fyra eleverna som använder en allmän ansats gör dessutom exakt samma misstag i sina beräkningar, misstaget leder till att de inte kan lösa den enkla olikheten $2x - 26 < x$. I deras lösningar återfinns den felaktiga sekvensen

” $2x - 26 < x$ ger $x - 13 < x$ ”.

Sekvensen vittnar om att eleverna, i det här fallet, inte kan utföra division med talet 2 i den relativt enkla olikhetens båda led. Misstaget är något oväntat, med tanke på att det handlar om högpresterande elever som tidigare har löst komplexa problem med olikheter under matematiklektionerna. Dessutom har dessa elever flera gånger under problemlösningen genomfört komplexa beräkningar i huvudet.

Man kan naturligtvis fråga sig vad som är orsaken till att tre av fyra elever gör samma, till synes, oförklarliga misstag. Intervjuanalysen visar att elever-

na blev stressade över att formaliseringen ledde till en olikhet istället för en ekvation. I intervjuerna efter problemlösningen vittnar alla elever om svårigheten att ställa om sig mentalt i den nämnda situationen:

X1: ... därför blev jag lite förvånad när det var så, det var mer på olikheten man löste det.

X2: Det är alltid svårt att börja tänka i andra banor. ... Det känns som man får så här hjärnsläpp.

X3: För jag blir så, ja fasen! När jag har börjat med ekvationer ... Då vill jag verkligen att det skall lösas ut med ekvationerna.

X4: Sådana här uppgifter brukar ha en ekvation.

X5: Alltså det, det kändes som det blev jobbigt för jag fick ingen, jag fick inget så här, på ena sidan fick jag inget konkret kändes det som. Det känns jobbigt att räkna om man bara har en, liksom att, man vet att det blir mindre än.

X6: Jag visste bara inte riktigt hur man skulle formulera, alltså här. Det är klart att det hade kanske varit något enklare om det var en vanlig ekvation, jag vet inte.

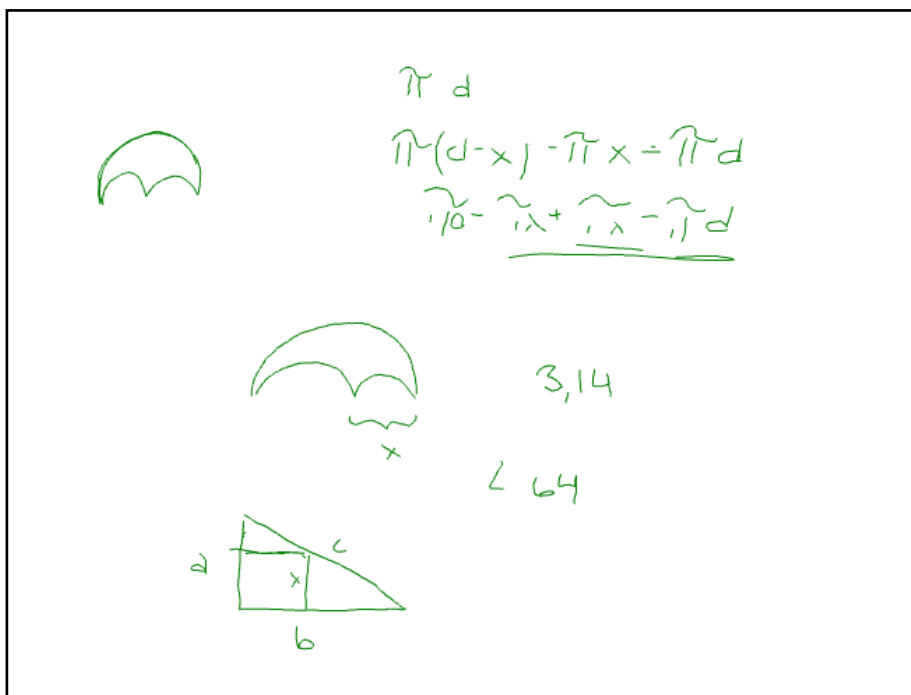
Analysen av det sammantagna empiriska materialet visar att när den valda metoden inte leder till en direkt lösning av problemet, så blir eleverna stressade och påtagligt osäkra. Det verkar som att deras problemlösningsmetod (ekvationslösning) saknar procedurer för lösning av olikheter. Osäkerheten medför att de återvänder till fasen då man *insamlar och formaliserar matematisk information* (förmåga 1) och *minns matematisk information* (förmåga 4). I denna fas studerar och formaliserar eleverna återigen problemet för att sedan pröva med en ny ansats till att *bearbeta informationen* (förmåga 2). Och det verkar som om det är osäkerheten och stressen som leder till att tre elever, bland fyra högpresterande elever som använder samma metod, gör samma enkla misstag under problemlösningen.

Procedurell kunskap består av både inlärd beteenden och kognitiva algoritmer (Squire, 2004). Att utföra algoritmer vid matematiska beräkningar är tydliga exempel på kunskaper som är lagrade i procedurminnet. Men det verkar som att problemlösningsmetoderna är nära förknippade med de procedurer som ingår i metoden. Om den valda metoden saknade vissa procedurer (som t.ex. lösning av olikheter), så ledde det undantagslöst till osäkerhet hos eleverna.

Kvalitativa skillnaden mellan lösningsmetoder

Analysen visar att elevernas lösningsmetoder kan delas in i de två kategorier som identifierades under a-priori analysen: *allmänna* respektive *numeriska* metoder. Följaktligen kunde jag huvudsakligen urskilja 7 allmänna, respektive 5 numeriska lösningsmetoder bland de 12 studerade processerna. Elevernas allmänna, uteslutande algebraiska, metoder ledde till att problemen kunde lösas på ett tillfredställande sätt. I dessa fall, på grund av det algebraiska angreppssättet, så fanns det inga numeriska delresultat i dessa processer som behövde generaliseras.

I sammanhanget bör det noteras att tre elever löste båda uppgifterna med uteslutande allmänna dvs. algebraiska metoder. Dessa elever kunde lösa båda uppgifterna på ett mycket tillfredställande sätt. För att exemplifiera detta, presenterar jag X3:s lösning av Problem 1 (figur 4).



Figur 4

X3:s anteckningar vid lösning av Problem 1

Genom att följa hennes anteckningar ser vi att X3 angriper problemet genom att införa obekanta och variabler. Metoden leder till att hon löser uppgiften på ett effektivt sätt.

Elev X2 försökte lösa båda problemen genom att använda uteslutande numeriska metoder. Han var ensam om att använda numeriska metoder vid båda problemen. Som exempel på ett numeriskt angreppssätt, presenterar jag härnäst X2:s lösning av Problem 1 (figur 5).

$2,5 \cdot 3 =$
 $x \cdot 3 = 3x$
 $1,5x$ $0,5x$
 X $x \cdot 3 = 3x$
 $1,5x \cdot 3 = 1,5x$
 $0,5x \cdot 3 = 1,5x$
 $1,5x + 1,5x = 3x$

Figur 5

X2:s anteckningar vid lösning av Problem 1

Genom att studera X2:s anteckningar observerar vi att lösningen inte är korrekt.

Övriga två elever blandade numeriska och allmänna lösningsmetoder. Av deras lösningsmetoder var det endast den algebraiska metoden som ledde till generella resultat. Ett exempel på en sådan metod är X5:s lösning av Problem 2 (figur 6).

$$X = (\text{Dolmarpris pris})$$

$$\text{Marna} = X - 24$$

$$\text{Peter} = X - 2$$

$$(X - 24) + (X - 2) = 2X - 26 = ? < X$$

or

$$24 - 25,99 \dots$$

$$24 < X < 26$$

$$X = 25$$

$$22 < X < 26$$

$$\downarrow 2X - 26 = < X$$

$$X = 13 = < X$$

Figur 6

X5:s anteckningar vid lösning av Problem 2

Sammanfattningsvis vill jag nämna att, i motsats till de allmänna metoderna, ledde de numeriska lösningsmetoderna till att respektive problem *inte* kunde lösas på ett korrekt sätt. Därmed kan jag konstatera att eleverna som behärskade allmänna lösningsmetoder var säkrare på sina resultat än de elever som använde numeriska metoder. Men vi får inte glömma att de presenterade problemen var nya för eleverna, följaktligen är det föga överraskande att eleverna inte riktigt visste vilka metoder de skulle använda.

Den mest effektiva lösningen, som varken innehöll oklarheter eller räknefel, är X3:s lösning av Problem 1. Hon var den enda eleven som kunde associera problemet till en annan, till synes helt annorlunda, uppgift. Därmed använde

hon en färdig modell för att lösa problemet. Modellen som hon använde var en *generaliserad lösningsmetod*, som förknippas med förmågan att *minnas matematisk information* (förmåga 4). Metoden var ytterst användbar och ledde till effektiv problemlösning. Jag kommer att diskutera de använda metodernas betydelse mer ingående i avsnittet där jag analyserar det matematiska minnets betydelse för problemlösningsprocessen.

Kvantitativa data

I samband med analysarbetet har jag noterat både interaktionen mellan de studerade komponenterna i den matematiska förmågan och tidsintervallet som respektive komponent tog i anspråk under problemlösningen. Analysen har resulterat dels i ett individuellt schema för varje elev och dels i en redovisning av den genomsnittliga andelen tid som respektive förmåga tar i anspråk under elevernas sammanlagda problemlösning.

Den individuella strukturen av elevernas matematiska förmåga

Den individuella strukturen av respektive elevs matematiska förmåga redovisas med hjälp av två slag av information: jag presenterar ordningsföljden mellan de sökta förmågorna och jag redovisar andelen tid (avrundat till närmaste heltal) som respektive förmåga tar i anspråk under respektive problemlösningsaktivitet.

Tabell 1

Ordningsföljd och andel matematiska förmågor vid lösning av Problem 1

Elev	Ordningsföljd mellan förmågor	Matematiska förmågor Andel tid uttryckt i procent						
		1	(1, 2)	(1, 4)	2	(2, 4)	3	4
X1	$(1, 4) - 1 - 4 - 1 - 4 - 1 - 2 - 4 - 2$	43		23	28			7
X2	$(1, 4) - 1 - (1, 4) - 1 - 4 - (1, 4) - 4 - 2$	16		19	59			7
X3	$(1, 4) - 1 - 4 - 1 - 2$	25		9	62			4
X4	$(1, 4) - 1 - (1, 4) - (1, 2) - 2 - 4 - 1 - 4 - 2 - 4 - 2$	16	3	12	58			12
X5	$(1, 4) - 1 - 4 - 1 - 2 - 1 - 4 - (1, 2)$	38	20	7	29			7
X6	$(1, 4) - 1 - 4 - (1, 4) - 4 - 1 - 2 - 4 - 2 - 1 - (1, 4) - 1 - 2$	35		9	55			3

I tabellen ovan (tabell 1) kan vi upptäcka konsekvensen av att det inte var möjligt att differentiera observerade matematiska förmågor under delar av problemlösningen. Problematiken, som är ingående beskriven i nästa avsnitt, leder till att även kombinationer av förmågor redovisas i statistiken. Följaktligen redovisar jag tidsandelar och ordningsföljd för följande kombinationer av förmågor: (1, 2), (1, 4) och (2,4).

Tabell 2

Ordningsföljd och andel matematiska förmågor vid lösning av Problem 2

Elev	Ordningsföljd mellan förmågor	Matematiska förmågor Andel tid uttryckt i procent						
		1	(1, 2)	(1, 4)	2	(2, 4)	3	4
X1	(1, 4) – 4 – 1 – 2 – 4 – (1, 4) – 1 – 2 – 1 – 2	59		7	32			3
X2	(1, 4) – 1 – (1, 4) – 4 – 1 – (1, 4) – 2 – 1 – 2	67		8	24			1
X3	(1, 4) – 4 – 1 – 4 – 1 – 2 – (2, 4) – 2	24		9	46	17		4
X4	(1, 4) – 4 – 1 – (1, 2) – 2 – 4 – 1 – 2 – (1, 2) – 2	32	4	7	54			4
X5	(1, 4) – 1 – 4 – 1 – 2 – 1 – 2 – 4 – 2 – 4 – (1, 2)	27		5	65			4
X6	(1, 4) – 4 – 1 – 2 – (2, 4) – 2 – 1 – (1, 2) – 2	19	2	9	64	4		1

Statistiken i tabell 2 visar tydligt de tre gemensamma faserna i problemlösningsprocessen som identifierades i samband med den kvalitativa analysen av det empiriska materialet. Vi kan också observera att det finns en bestämd kronologisk ordning mellan dessa gemensamma faser: varje elev börjar problemlösningen med en fas där förmågan att *insamla och formalisera matematisk information* (förmåga 1) samverkar med förmågan att *minnas matematisk information* (förmåga 4), efter det följer en fas där elever *bearbetar matematisk information* (förmåga 2) och varje aktivitet avslutas med en fas

där eleverna återigen använder sin förmåga att *bearbeta matematisk information* (förmåga 2).

Redovisningen vittnar om att det är två förmågor, som enskilt eller i olika kombinationer, är mest företrädande under problemlösningen: förmågan att *insamla och formalisera matematisk information* (förmåga 1) samt förmågan att *bearbeta matematisk information* (förmåga 2). Enligt ovanstående statistik verkar det som att det är förmågan att *bearbeta matematisk information* som tar mest tid i anspråk under problemlösningen. Men en närmare observation visar att detta inte gäller för alla elever, t.ex. förmågan att *insamla och formalisera matematisk information* är mer framträdande hos X1 än hos övriga elever.

Vi kan också notera att förmågan att *minnas matematisk information* (förmåga 4) tar i anspråk minst andel tid under processen. Andelen tid som elever använder sitt *matematiska minne* i isolerad form under problemlösningen varierar mellan 1 och 12 procent. Men om vi undersöker andelen tid som det *matematiska minnet* är närvarande i samverkan med andra förmågor, så kan vi konstatera att den proportionen ligger mellan 10 och 17 procent. Oavsett jämförelsemetod, kan vi konstatera att andelen tid då förmågan att minnas matematisk information används under problemlösningen är avsevärt mindre än andelen tid då övriga två förmågor används.

Den generella strukturen av elevers matematiska förmåga

Den genomsnittliga andelen tid som de studerade förmågorna tar i anspråk under elevernas sammanlagda problemlösningstid presenteras i tabellen (tabell 3) nedan.

Tabell 3

Genomsnittlig andel tid per matematisk förmåga i samband med elevernas problemlösning

Matematiska förmågor i samband med elevernas problemlösning						
1	(1, 2)	(1, 4)	2	(2, 4)	3	4
33 %	2 %	10 %	48 %	2 %	0 %	5 %

Sammanställningen visar att eleverna använder ungefär hälften av tiden för att *bearbeta matematisk information* (förmåga 2), 45 procent av tiden går åt att *insamla och formalisera matematisk information* (förmåga 1) i kombination med någon annan förmåga och 17 procent av problemlösningsaktiviteten påverkas av förmågan att *minnas matematisk information* (förmåga 4) i kombination med någon annan förmåga.

I nästa avsnitt kommer jag att visa att trots att förmågan att *minnas matematisk information* är närvarande minst andel tid under aktiviteten, så påverkar den förmågan i stor utsträckning elevernas problemlösning.

Det matematiska minnets roll vid problemlösning av nya matematiska problem

Det matematiska minnet används mest i samband med förmågan att insamla matematisk information

Både den kvalitativa och den kvantitativa analysen av den matematiska förmågens struktur framhäver att det matematiska minnet framträder ytterst sällan i isolerad form. Undersökningen pekar också på att det matematiska minnet är ständigt närvarande under den inledande fasen av problemlösningen. Den kvantitativa sammanställningen visar att förmågan att *minnas matematisk information* (förmåga 4) förekommer dubbelt så mycket med avseende på andel tid i kombination med förmågan att *insamla och formalisera matematisk information* (förmåga 1) än i sin isolerade form (10 % respektive 5 %, se tabell 3). Den nämnda kombinationen (där förmåga 1 och förmåga 4 samverkar) är fem gånger vanligare än att det *matematiska minnet* samverkar med förmågan att *bearbeta matematisk information* (förmåga 2) (10 % respektive 2 %, se tabell 3). Den observationen har viktiga konsekvenser för elevers problemlösning, eftersom det verkar som om eleverna väljer sina respektive lösningsmetoder i problemlösningens inledande fas.

I följande exempel kan vi se hur det *matematiska minnet* (förmåga 4) framträder under inledningsfasen tillsammans med förmågan att *insamla och formalisera matematisk information* (förmåga 1).

Elev X3 minns, som jag redan har påpekat, under den inledande fasen en uppgift som det aktuella problemet kan associeras till. Men trots det kunde jag identifiera förmåga 4, i isolerad form, endast under några sekunder. Detta sker vid enheterna vid 1.00 och 1.08.

Tid	Digitalt inspelad lösning	Transkription – X3	Förmåga
0.22		<i>tystnad</i> intervju: X3: Det jag såg först och främst, när jag kollar på uppgiften, det första jag ser är ju att jag måste kolla på diametrarna.	1, 4

		X3: Det liknar en annan uppgift som jag gillar väldigt mycket så...	
0.30		X3: Just ja här kommer vi ju och bara använda, vilken radie den har. intervju: X3: Eftersom att det är det dom har gemensamt, om jag kollar på det så ser jag, så, jag ser en massa cirkelbågar som står över på samma sträcka, den här sträckan är det dom har gemensamt.	1, 4
0.45	<i>ritar tre halvcirklar</i>		1
0.55		X3: Basicly det vi försöker få fram, är... Om jag har ... Om vi har en diameter och så ... Är det ju...	1
1.00	πd	<i>eleven kommer ihåg formeln för cirkeln omkrets</i>	4
1.08 1.11	$\pi ($	intervju: X3: Och då uttrycker man det helt enkelt som att, ja, man uttrycker deras olika diametrar som någonting av varandra. X3: Precis, om man löser den där, det första man gör då, det är ju att man gör upp formler för ... hur olika trianglar och kvadrater, insidan av den ser ut. X3: Precis som där, om man uttrycker olika sidor genom och ta, en sida minus andra, precis som i den...	4

X3:s beskrivning av uppgiften som associeras till det givna problemet har stora likheter med Krutetskiis (1976) redovisning av högpresterande elevers skildringar av problemlösningsmetoder. I Krutetskiis studie refererade de högpresterande eleverna till en uppgift som handlade om en fisk och dess vikt, men de kunde inte komma ihåg konkreta fakta om fisken. De mindes däremot mycket väl problemtypen och metoden som krävdes för att lösa den (*ibid*, s.299).

Man kan också notera att X3:s uttalanden bekräftar Krutetskiis observation om hur effektiv användning av minnesfunktioner i samband med en matematisk aktivitet går till. Förmågan som har identifierats som *matematiskt minne* leder till att det som är meningsfullt i sammanhanget (lösningsmetoder och andra generaliserade samband) blir ihågkommet, medan det som är meningslöst (siffror och specifik kontext) glöms bort.

Även saknaden av generaliserade lösningsmetoder påverkar problemlösningens inledande fas, som t.ex. hos elev X2 vid lösning av Problem 1.

Tid	Digitalt inspelad lösning	Transkription – X2	Förmåga
0.14		<i>eleven läser uppgiftstexten högt ett par gånger</i> intervju: X2: Jag förstod inte riktigt vad jag skulle göra. Jag försökte komma på någon formel så där eller något, men det blev lite krångligt. <i>eleven minns att man bör använda en formel, försöker bestämma relationen mellan variablerna</i>	1, 4
0.48		X2: Får man använda linjal? Då vill jag räkna ut längden. Är ... måste jag använda diametern. intervju: X2: Under första uppgiften så tänkte jag att jag skulle börja med siffror, för att se vad sambandet var.	1
1.14		<i>eleven frågar återigen om hon får mäta i figuren, jag svarar att hon bör tänka i allmänna termer</i>	
1.22		X2: Gud vad svårt. X2: Det känns ju som den där är större eftersom den ser ju större ut. <i>eleven bestämmer relationer mellan variablerna</i>	1
1.56		X2: Man tar ju diametern gånger tre delat på ... nej vad är det? Typ diametern gånger pi upphöjt till två gånger. Nej vad	4

2.06		är? Radien gånger pi upphöjt till två. <i>eleven försöker att minnas formeln för cirkelns omkrets</i>	
------	--	--	--

Och likaså använder elev X4 sitt *matematiska minne* (förmåga 4) under den inledande fasen, som till exempel vid lösning av Problem 2, för att sedan återgå till att använda förmågan att *insamla och formalisera matematisk information* (förmåga 1).

Tid	Digitalt inspelad lösning	Transkription – X4	Förmåga
0.07		intervju: O: Varför tänkte du just på ekvation? X4: Sådana här uppgifter brukar ha en ekvation. <i>eleven bestämmer sig för att lösa uppgiften med hjälp av ekvation</i>	1, 4
0.35	x kr	<i>eleven visar att han vill lösa uppgiften med hjälp av ekvation</i>	4
0.37		X4: Om vi säger att, CD-skivan kostar x kronor intervju: X4: Först ville jag bara få det ... Alltså bara skriva ner det, alltså med siffror och variabler. <i>eleven bestämmer relationer mellan variablerna</i>	1
0.47 1.09	M x – 24 kr P x – 2 kr	X4: Hm ... Maria har ...	1

Avslutningsvis kan vi konstatera att även elev X5 resonerar på samma sätt vid lösning av Problem 2. Förmågan att *minnas matematisk information* (förmåga 4) observeras mest i nära anknytning till förmågan att *insamla och formalisera matematisk information* (förmåga 1).

Tid	Digitalt inspelad lösning	Transkription – X5	Förmåga
0.17		<i>tystnad</i> intervju: X5: Direkt tänker man ekvation så fort det är någonting som man ... Jag tänkte först ekvation när jag bara såg uppgiften. Göra någonting, försökte ställa upp en ekvation. <i>eleven bestämmer sig för att lösa uppgiften med hjälp av ekvation</i>	1, 4
0.36		X5: Alltså båda vill köpa samma cd-skiva. X5: Maria kommer dit och så ... Ok.	1
0.47		X5: ... vänta ... om Maria har 24 kronor mindre ... <i>eleven bestämmer relationer mellan variablerna</i>	1
1.20	$x = \text{CD skivans pris}$	X5: Vi kan kalla priset x, skriver vi, skivans pris. <i>eleven väljer att lösa uppgiften med hjälp av ekvation</i>	4
1.22 1.42	Maria = $x - 24$ Peter = $x - 2$	<i>eleven bestämmer relationer mellan variablerna</i>	1

De presenterade exemplen visar att förmågan att *minnas matematisk information* (förmåga 4) sällan kan observeras under mer än ett par sekunder i det empiriska materialets *manifesta innehåll*. I dessa fall handlar det matematiska minnet (förmåga 4) t.ex. om att komma ihåg formeln för cirkelns omkrets eller att komma ihåg notations- och lösningsmetoder för ekvationer och olikheter.

Det *latenta innehållet* av förmåga 4 – t.ex. när förmågan används i samband med förmåga 1 – visar sig vara mycket mer omfattande, något som fram-

kommer tydligt i intervjuerna som genomfördes efter problemlösningen. Problemet är naturligtvis, precis som jag nämnde det i avsnittet som diskuterar analysarbetet, att det är svårt att exakt identifiera längden av det matematiska minnets närvaro i den inledande fasen, när eleven är tyst eller inte gör några notationer. Med mina undersöknings- och analysmetoder kunde jag tyvärr inte uppnå en högre precision än vad jag redovisar i analysen.

Det matematiska minnet är avgörande för valet av lösningsmetod

I föregående avsnitt har jag visat att det matematiska minnet är mest framträdande under problemlösningens inledande fas. De presenterade exemplen poängterade också att det är i den inledande fasen som eleverna väljer sina lösningsmetoder. Valet av lösningsmetod har viktiga konsekvenser för elevers problemlösning. Den kvalitativa analysen visar att elever har mycket svårt att ändra sina initialt valda lösningsmetoder.

Tidigare har vi konstaterat att om de valda metoderna inte leder till önskat resultat, så väljer eleverna att gå tillbaka till den fasen av problemlösningen där de återaktualiserar och formaliserar den matematiska informationen, dvs. förmåga 2 följs av förmåga 1. Med hjälp av följande exempel ska jag visa hur elever gång på gång återvänder till sina, under inledningsfasen valda, lösningsmetoder, även om metoderna inte leder till önskat resultat. Det tyder på att den valda problemlösningsmetoden, som är resultatet av en tidigare generalisering (förmåga 4), ytterst sällan omprövas efter den inledande fasen.

Jag illustrerar detta först med utdrag från analysen som hör till X1 vid lösning av Problem 2. Under den inledande fasen av problemlösningsprocessen väljer eleven att lösa problemet med hjälp av ekvationer, det som följer efter den fasen presenteras nedan.

Tid	Digitalt inspelad lösning	Transkription – X1	Förmåga
4.47	$y + 2 - 24 = y - 22$ $x - 2 + x - 24 < x$ $2x - 26 < x$	X1: Vilket betyder att x måste vara mindre än 26. intervju: X1: Kanske tänkt att ja. Men det ska finnas nånstans med det här intervallet, så att om jag får fram det här svaret till andra-gradsekvationer, så kan inte det stämma.	2
5.55	$x - 13 < x$ <i>sedan stryker ele-</i>	<i>eleven påpekar att x måste vara mindre än 26</i> <i>eleven blir osäker när ekvatio-</i>	2

	$ven \text{ över } x - 13 < x$	<i>nera leder till en olikhet och gör fel i beräkningar</i>	
6.08		<i>eleven återaktualiserar och formaliserar problemet</i>	1
7.28	$x - 24 = \text{Maria}$ $x - 2 = \text{Peter}$ $x = \text{CD pris}$	X1: Skriver så att jag har allting samlat på ett snyggare sätt.	1
7.57	$2x - 26 < x$		2
8.05		<i>eleven blir återigen osäker när ekvationerna leder till samma olikhet; eleven aktualiserar och formaliserar problemet en gång till</i>	1
9.35	$y + 22 = \text{Peter}$ $y = \text{Maria}$ $y + 24 = x$		1
10.10 10.44	$y + 22 + y > y + 24$ $2y + 22 > y + 24 -$	X1: Kommer fram till samma olikheter. <i>efter att eleven för tredje gången har kommit fram till samma olikhet, börjar eleven resonera logiskt och löser problemet</i>	2

För att bättre belysa problematiken, presenterar jag även utdrag från analysen som hör till elev X5 vid lösning av Problem 2. Även X5 bestämmer sig under den inledande fasen att lösa problemet med hjälp av ekvationer; det som följer visar jag härnäst.

Tid	Digitalt inspelad lösning	Transkription – X5	Förmåga
1.42	$(x - 24) + (x - 2) =$ $2x - 26 = ? < x$	intervju: X5: Alltså det kändes som det blev jobbigt för jag fick ingen, jag fick inget så här ... På ena sidan fick jag inget konkret kändes det som. Det känns jobbigt att räkna om man bara har en, liksom att, man vet att det blir mindre än x . Så det är inte, det	2

		är ingen ekvation egentligen.	
2.25		<i>eleven blir osäker när ekvationerna leder till en olikhet; eleven återaktualiserar och formaliserar problemet</i>	1
4.50	$2x - 26$		2
5.12		<i>diskussion om att eleven inte vet hur man ska uttrycka sig</i>	
5.22	$2x - 26 < x$		2
5.30		<i>diskussion om vad resultatet betyder och hur olikheten bör tolkas</i>	
5.48		X5: Alltså om man skulle ta bort 26 från pengarna dom har, så skulle man ... Om man tog bort 26 kronor från pengarna dom hade, så skulle dom få, kan förkorta. <i>eleven försöker minnas hur man löser en olikhet med det obekanta i båda led</i>	4
5.55 6.12	$x - 13 = < x$	<i>eleven blir osäker när ekvationerna leder till samma olikhet, gör fel i sina beräkningar</i> <i>eleven återaktualiserar och formaliserar problemet – men byter inte metod – efter ett tag kommer eleven fram till den korrekta lösningen</i>	2

Samma beteende, dvs. att man håller fast vid den valda metoden efter en ny insamling och formalisering av det matematiska materialet – även om den inte leder till önskat resultat – kan observeras hos alla elever.

Analysen visar att i 11 av de studerade 12 problemlösningsprocesser håller eleverna fast vid den, i inledningsfasen, valda metoden. Den enda elev som inte fortsätter med den valda metoden är X4 (vid Problem 1), istället försöker han med hjälp av muntlig argumentation och enkla beräkningar resonera sig fram till en lösning. I sammanhanget är det viktigt att påpeka att X4 inte ändrar sin valda metod, däremot slutar han att använda den. Tilläggas bör att

X4 är den enda eleven som inte löser något av de presenterade problemen på ett tillfredställande sätt.

Sammanfattningsvis kan jag konstatera att det matematiska minnets betydelse för valet av lösningsmetoder är synnerligen viktig. Trots att eleverna flera gånger under problemlösningen återaktualiserar och formaliserar det givna problemets förutsättningar, så håller de fast vid den, i inledande fasen, valda lösningsmetoden. Det verkar som att den valda metoden, som är hämtad från det semantiska minnet, hålls kvar i arbetsminnet under hela problemlösningsprocessen. Däremot är procedurer, som är förknippade med den valda metoden, införda i arbetsminnet med hjälp av automaticitet. Den stora fördelen med automatiska processer är att den sortens processer inte tar utrymme i arbetsminnet (Ingvar, 2009b). Enligt den biologiska modellen pågår all informationsbearbetning i arbetsminnet med hjälp av parallella processer. Därför är det möjligt för eleverna att hålla kvar den valda problemlösningsmetoden under hela problemlösningen, trots att fler enheter och procedurer, såsom algoritmer, formler och andra samband, plockas fram ur och placeras tillbaka i långtidsminnet (Ingvar, 2009b; Klingberg, 2007). Mina observationer ställda i ljuset av den biologiska förklaringsmodellen antyder att problemlösningsmetoder är intimt förknippade med procedurer och att eleverna blir ytterst osäkra när den valda metoden saknar vissa procedurer.

Resultaten antyder att det matematiska minnets närvaro under den inledande fasen av problemlösningen är avgörande för hur väl problemet kan lösas, eftersom eleverna inte klarar av att ändra den initialt valda lösningsmetoden.

Vikten av generaliserade lösningsmetoder

Den kvalitativa analysen visar att det som påverkade eleverna mest under lösningsprocessen var att valda problemlösningsmetoder inte ledde till önskat resultat. Problematiken uppmärksammades i 10 av de studerade 12 processerna. Som jag nämnde i det föregående avsnittet, blev eleverna undantagslöst oroliga när ekvationer ledde till olikheter vid Problem 2 och när de inte visste hur man beskriver generella samband mellan cirkelbågarnas längder vid Problem 1. Iakttagelserna är kanske inte så överraskande med tanke på att eleverna inte tidigare har sett de presenterade problemen, vilket var en av viktigaste förutsättningarna i samband med studien.

Det var två problemlösningsprocesser som genomfördes utan de nämnda orosmomenten: lösningen av Problem 1 av X1 respektive X3. Det bör också påpekas att X1 gör två små räknefel under lösningen, som sedan korrigeras av eleven. Elev X3 gör däremot inga misstag under processen, därmed är hennes lösning den mest effektiva problemlösningen i denna studie. I sammanhanget är det viktigt att notera att X3 är den enda eleven som kan associera problemet till en annan, till synes annorlunda, uppgift. På det sättet använder hon en lösningsmetod som är resultatet av *tidigare generalisering-*

ar (förmåga 4). Hon uttrycker detta flera gånger under intervjun, enligt följande:

X3: Det jag såg först och främst, när jag kollar på uppgiften, det första jag ser är ju att jag måste kolla på diametrarna.

...

X3: Eftersom att det är det dom har gemensamt, om jag kollar på det så ser jag, så, jag ser en massa cirkelbågar som står över på samma sträcka, den här sträckan är det dom har gemensamt.

...

X3: Det liknar en annan uppgift som jag gillar väldigt mycket så...

...

X3: Och då uttrycker man det helt enkelt som att, ja, man uttrycker deras olika diametrar som någonting av varandra.

...

X3: Precis, om man löser den där, det första man gör då, det är ju att man gör upp formler för ... hur olika trianglar och kvadrater, insidan av den ser ut.

Intervjun avslöjar att lösningsmetoden var generaliserad och dessutom kände X3 i detalj procedurerna som skulle användas i samband med metoden. När hon senare löser Problem 2, kan hon inte associera det givna problemet till en annan uppgift vars lösningsmetod är generaliserad. I det fallet använder hon ekvationer eftersom hon är van med att använda ekvationer.

X3: Det första jag tänkte med den där det är ju att jag måste få ihop ett ekvationssystem.

...

X3: För att, när jag ser det här att ... det finns olika samband mellan siffrorna, det första jag tänker när jag ser dom sambanden är ekvationssystem.

...

X3: Ställa upp informationen så man ser den och då är det lika bra och göra ekvationer av det så är det lättare och hantera.

Men hon blir orolig när den valda metoden inte leder till önskat resultat (när ekvationerna leder till en olikhet) och gör enkla misstag.

X3: Och då är det, för det där är väl, det är väl liksom där största tankeverksamheten går igång för mig för där har jag... Precis. Just eftersom, plus att jag är ganska ovan vid det här och räkna med, när det inte är "lika med" tecken.

...

X3: Jag har, jag har inte räknat så mycket med det så jag har lite svårt och komma in i vad man gör med dom ... Det är nästan ingen som räknar med sådant, ofta så räknar vi med ekvationer och likheter, det är det som är intressant.

Hennes oro förstärks ytterligare av notationerna som hon väljer att använda.

X3: ... då blir det en extra utmaning på något sätt när du inte bara kan sätta in ett lika med tecken, för då är det bara och flytta runt grejerna. Här blir det ju ett sådant stort hinder från att flytta runt saker. Just eftersom att det är ett olikhetstecken. Är det "lika med" tecken, då är det bara och flytta runt...

De ovanstående exemplen visar att X3 löser de två problemen på helt olika sätt. Om hon använder en tydlig modell, som är resultatet av *tidigare generaliseringar* (förmåga 4), så gör hon inga misstag. Om hon saknar en tydlig modell som är resultatet av tidigare generaliseringar – eftersom formaliseringen leder till olikheter istället för de förväntade ekvationerna – så gör hon enkla misstag.

Elev X1 löser respektive problem på samma sätt som X3, men kan inte associera Problem 1 till en annan konkret uppgift. Intervjun som genomfördes efter Problem 1 inleder han enligt:

X1: Så tänkte jag att ... först tänkte jag men kanske det beror lite på x här, men det gör det egentligen inte, för att förhållandet ... det är alltid ett förhållande mellan dem, som gör att den totala längden av dem alltid blir den samma.

Sedan medger han att han tidigare har löst liknande uppgifter:

X1: Men sen får man ... När man har gjort ett par såna här uppgifter så börjar man förstå sånt

O: Men du har inte sett sådana uppgifter. Just den här.

X1: Liknande.

Jag har i föregående avsnitt visat vilka misstag elev X1 gör när den valda metoden inte leder till önskat resultat vid Problem 2, dvs. när formaliseringen leder till en olikhet istället för en ekvation. Härnäst kommer ett utdrag ur intervjun som refererar till de svårigheterna:

X1: Ja, hm ... Alltså visst jag har ju fått uppgifter med olikheter, men då har det stått i boken: lös det här med olikheter och sånt.

O: Hm.

X1: Någon gång har man kanske tänkt att ja men det ska finnas nånans med det här intervallet, så att om jag får fram det här svaret till andragradsekvationer så kan inte det stämma.

O: Ja, hm.

X1: Men inte mer än så, så därför blev jag lite förvånad när det var så. Det var mer på olikheten man löste det.

Senare återkopplar han återigen till oron som han upplevde under problemlösningen:

X1: Sen när jag gick genom så upptäckte jag att jag gjorde några fel och bara strök över så blev det lite rörigt. Sen samlar jag ihop allting på slutet när jag hade skaffat mig lite mer fakta. Och då blev det lite lättare att lösa ut.

Båda eleverna använder generaliserade lösningsmetoder, men resultatet av X3:s generalisering är mycket mer påtaglig än X1:s metod. Analysen visar också att eleverna blir osäkra och gör samma sorts fel när de saknar en lösningsmetod som är resultatet av tidigare generaliseringar eller när den valda metoden inte innehåller passande procedurer. Den osäkerheten uppträder även hos övriga elever när de hamnar i liknande situationer. Följande uttalanden tydliggör att de fyra eleverna (X1, X2, X3 och X4) saknar en lösningsmetod som inbegriper både ekvationer och olikheter.

X1: Ja, hm ... Alltså visst jag har ju fått uppgifter med olikheter, men då har det stått i boken: lös det här med olikheter och sånt.

X2: Det är alltid svårt att börja tänka i andra banor. Det känns som man får så här hjärnsläpp.

X3: För jag blir så, ja fasen! När jag har börjat med ekvationer, då vill jag verkligen att det skall lösas ut med ekvationerna.

X4: Sådana här uppgifter brukar ha en ekvation.

Sammanfattningsvis kan jag konstatera att om eleverna inte kan associera problemen till en lösningsmetod som är resultatet av tidigare generaliseringar, så använder de metoder som de är vana att använda. Det verkar också som att ju mer konkret – med avseende på inkluderade procedurer – den generaliserade lösningsmetoden är, desto bättre resultat ger den. När lösningsmetoden inte leder till önskat resultat, blir eleverna oroliga och avbryter processen: de återvänder till fasen när de insamlar och formaliserar matematisk information, men använder sedan återigen samma lösningsmetod. Följaktligen verkar det som att *rätt sorts lösningsmetoder* och tillhörande *procedurer* är av mycket stor vikt, eftersom de underlättar problemlösningen genom att införa en trygghetsfaktor i processen.

Diskussion

I detta avslutande avsnitt kommer jag att diskutera studien med avseende på tidigare presenterade teoretiska perspektiv, använda metoder, observerade resultat och eventuella implikationer för matematikämnets undervisning i skolan.

Metod

Inledningsvis vill jag påpeka att de använda undersökningsmetoderna har fungerat ändamålsenligt. Eleverna var motiverade och gjorde sitt bästa för att lösa de presenterade problemen. Både deras muntliga och skriftliga kommunikation var begriplig under problemlösningsprocessen och i de efterföljande intervjuerna var de angelägna att förklara hur de har tänkt i samband med problemlösningen. Ljudupptagningarna och de digitala inspelningarna var av hög kvalitet, vilket avsevärt underlättade mitt analysarbete. Tack vare de digitala inspelningarnas höga kvalitet var det möjligt att identifiera och tolka det manifesta innehållet i elevernas skriftliga lösningar.

De problem som dök upp i samband med studien, kan uteslutande härledas till analysen av problemlösningens latenta innehåll. Som jag nämner i avsnittet som presenterar studiens analys, blev det uppenbart att skriftliga lösningar inte kan påvisa alla matematiska förmågor som interagerar under problemlösningen. Den nämnda problematiken observerades främst i den första fasen, då eleverna satt tysta i relativt många sekunder innan de gjorde noteringar eller uttryckte sig muntligt. Elevernas noteringar och de efterföljande intervjuerna visade sedan att det var två förmågor som kompletterande varandra och interagerade under problemlösningens inledande fas: förmågan att *insamla* och *formalisera matematisk information* (förmåga 1) samt förmågan att *minnas matematisk information* (förmåga 4). Däremot kunde varken efterföljande intervjuer, digitalt inspelade lösningar eller ljudupptagningar tydliggöra på vilket sätt dessa två förmågor interagerade under problemlösningens första fas.

Jag antar att problemet beror på hjärnbarkens, dvs. arbetsminnets, funktion enligt den biologiska modellen. Arbetsminnets huvudsakliga uppgift är att möta all ny information i förhållande till tidigare kunskaper och erfarenheter (Ingvar, 2009b). Enligt den biologiska modellen pågår matematisk problemlösning i arbetsminnet, därmed kan problemlösningen betraktas som en kontinuerlig och cyklisk process som äger rum under en begränsad tidsperiod.

Arbetsminnet är ytterst begränsat, men det är fullt möjligt att behålla sju informationsenheter samtidigt i arbetsminnet. Information som bearbetas i arbetsminnet försvinner efter högst 30 sekunder, vilket medför att repetition och återaktualisering är det enda sättet att hålla kvar enheterna (Ingvar, 2009a, 2009b). Följaktligen är det rimligt att anta att problemlösningen in-

leds med hjälp av parallella processer där förmågan att *insamla* och *formalisera matematisk information* (förmåga 1) påverkas av tidigare generaliseringar, dvs. av förmågan att *minnas matematisk information* (förmåga 4). På det sättet förefaller det också vara rimligt att informationsenheterna som under problemlösningens inledande fas bearbetas i arbetsminnet hör till nämnda förmågor. Men eftersom enheterna hämtas i mycket höga hastigheter till arbetsminnet och hålls kvar där i parallella processer, så blev det inte möjligt att isolera dem med de observations- och analysmetoder som användes i denna studie.

Därmed bekräftar denna studie Krutetskiis (1976) observation att under problemlösningssprocessen är det mycket svårt att särskilja förmågan att *insamla* och *formalisera matematisk information* från förmågan att *minnas matematisk information*.

Man kan naturligtvis också fråga sig om det är nödvändigt att kunna skilja förmågan att *insamla* och *formalisera matematisk information* från förmågan att *minnas matematisk information* under problemlösningens allra första fas. Jag är inte längre säker på att det är nödvändigt.

I en diskussion med professor Schoenfeld (2012) fann jag ett nytt perspektiv för att betrakta problematiken. Schoenfelds råd var att vi bör betrakta matematiska förmågor i samband med problemlösning på samma sätt som man betraktar kroppsdelar i förhållande till den mänskliga kroppen. Det vill säga, trots att de funktioner som är förknippade med våra kroppsdelar kan uppfattas och studeras i isolerad form, är det förhållandevis meningslöst att studera dem när kroppsdelarna är avskilda från kroppen. Vi kan naturligtvis konstatera att varje kroppsdel har avgränsade och distinkta funktioner, men dessa funktioner blir omöjliga att förstå om de inte förklaras inom det helhetssystem som den mänskliga kroppen utgör.

Ovanstående jämförelse får tjäna som avslutande reflektion i samband med den nämnda problematiken. Ibland händer det att svårlösta problem, som i det fallet distinktionen mellan förmågan att *insamla* och *formalisera matematisk information* och förmågan att *minnas matematisk information* under problemlösningens allra första fas, inte blir mer triviala när vi försöker reducera dem till enkla mekanismer.

Matematiska förmågors interaktion vid problemlösning av för eleven nya matematiska problem

Ett av studiens huvudsyften var att kartlägga de matematiska förmågornas interaktion under problemlösning av nya matematiska problem. För att kunna särskilja förmågor från kunskaper och inlärd metoder, blev valet av matematiska problem avgörande för studiens framgång. Lyckligtvis visade det sig att ingen av eleverna kunde minnas att ha sett de presenterade problemen.

Därmed uppfattade eleverna de valda uppgifterna som nya och utmanande matematiska problem som inte är av standardkaraktär, vilka var problemens viktigaste förutsättningar. Även Krutetskii (1976) påpekar vikten av att använda nya matematiska problem vid observationer, för att så långt som möjligt undvika påverkan av elevernas tidigare erfarenheter och kunskaper.

Analysen visar dels att varje problemlösningsaktivitet innehåller tre bestämda faser och dels att det finns en kronologisk ordning mellan dessa faser. Varje problemlösningsaktivitet börjar med en inledande fas där förmågan att *insamla och formalisera matematisk information* (förmåga 1) samverkar med förmågan att *minnas matematisk information* (förmåga 4). Den fasen följs av en fas där förmågan att *bearbeta matematisk information* (förmåga 2) framträder. Och varje problemlösningsaktivitet avslutas med en fas där förmågan att *bearbeta matematisk information* (förmåga 2) används i samband med att eleverna kontrollerar sina lösningar. Utan att ha ambitionen att dra långtgående slutsatser från min begränsade studie, vill jag ändå understryka att de nämnda fasernas kronologiska ordningsföljd bekräftar i viss mån Polyas (1957) hypotes om hur modellen för matematisk problemlösning bör se ut. Enligt Polya bör matematisk problemlösning följa följande schema:

- först måste man förstå problemet,
- sedan måste man inse hur de olika delarna hänger ihop med varandra, hur det som söks är relaterat till det som är givet, man måste införa lämpliga beteckningar och göra upp en plan,
- efter det ska man genomföra planen och
- avslutningsvis ska man kontrollera den färdiga lösningen.

(*ibid*, s. 16-17)

Om vi tolkar ovanstående modell i termer av matematiska förmågor, så upptäcker vi att den inledande fasen i de observerade elevernas problemlösning, där förmågan att *insamla och formalisera matematisk information* samverkar med förmågan att *minnas matematisk information*, kan relateras till de två första punkterna i modellen. Den inledande fasen följs av en fas där elevernas förmåga att *bearbeta matematisk information* framträder. I modellen ovan kan detta relateras till den tredje punkten, där man genomför planen. Varje aktivitet avslutas med en fas där eleverna kontrollerar sin lösning (förmåga 2) som motsvarar den fjärde punkten i Polyas modell. I sammanhanget bör det nämnas att eleverna använde sina matematiska förmågor, i olika kombinationer, även utöver de tre nämnda kronologiska faserna. Men det är ändå möjligt att upptäcka att det finns paralleller mellan Polyas modell och det, i denna studie, insamlade empiriska materialet. Det är naturligtvis omöjligt att veta om eleverna har studerat Polyas rekommendationer i samband med problemlösning, men observationen bekräftar åtminstone delvis att högpresterande elever löser nya matematiska problem enligt Polyas modell.

Analysen visar också att förmågan att *generalisera matematiska samband* inte kunde identifieras hos de observerade eleverna. En nödvändig förutsättning för att eleverna skulle kunna generalisera de samband som de har upptäckt under problemlösningen var att de försökte lösa problemen med numeriska angreppssätt. Men trots att nästan hälften av lösningsmetoderna var numeriska och trots att jag mot slutet av varje problemlösningsprocess ställde frågan om de kunde generalisera de erhållna resultaten, visade ingen av eleverna prov på att kunna *generalisera matematiska samband* (förmåga 3). Resultatet är något överraskande eftersom de studerade eleverna är gymnasieelever som är högpresterande i ämnet. Därför är det rimligt att anta att om ingen av dessa högpresterande elever kan generalisera de erhållna resultaten, så kommer elever som inte är högpresterande ha minst lika svårt att generalisera sina numeriska resultat.

I sammanhanget är det kanske också naturligt att ställa frågan om vilken sorts problemlösningssmetoder man bör sträva efter i matematikundervisningen. I det avseendet antyder denna studie att allmänna lösningsmetoder är att föredra framför numeriska metoder.

En annan intressant aspekt av den matematiska förmågans dynamiska struktur kom fram när de valda lösningsmetoderna inte gav önskat resultat. Problematiken blev uppenbar när alla elever fick bekymmer när de skulle lösa Problem 2, där det ursprungliga ekvationssystemet ledde till en olikhet. Analysen visar att den valda metoden (algebraisk metod) saknade procedurer för lösning av olikheter och därmed inte direkt ledde till förväntat resultat. Vid det skedet blev eleverna stressade och osäkra, vilket medförde att de gjorde enkla misstag i sina beräkningar. Den upplevda stressen förde även med sig att de avbröt den pågående *bearbetningen* av *matematisk information* (förmåga 2) och återvände till fasen då man *insamlar* och *formaliserar matematisk information* (förmåga 1). I sammanhanget vill jag återigen påminna om att jag, i denna studie, har observerat elever som är högpresterande i matematik. Därför förefaller det rimligt att även elever som inte är högpresterande skulle bli stressade och osäkra i en liknande situation och att de också skulle göra misstag i sina beräkningar.

För att undvika stressen och osäkerheten i samband med den nämnda problematiken, så bör eleverna möjligtvis exponeras för mer flexibla problemlösningssmetoder, dvs. metoder som inte är beroende av tillhörande procedurer. På det sättet skulle de kanske kunna klara av att använda eller testa procedurer som inte direkt är förknippade med en viss lösningsmetod.

Analysen har också visat att eleverna inte ändrade sina lösningsmetoder under problemlösningen. Jag kommer att fokusera den aspekten i samband med diskussionen om det matematiska minnets roll i problemlösningen.

Det matematiska minnets roll vid problemlösning av för eleven nya matematiska problem

Som jag nämnde i avsnittet som behandlar studiens analys, så visade det sig att ingen av eleverna har tidigare sett de presenterade problemen. Därmed uppfyllde problemen det viktiga kriteriet att vara *för eleven nya matematiska problem* som utmanar elevens förmåga att *minnas matematisk information* (förmåga 4).

Intervjuerna som genomfördes efter problemlösningen bekräftade Krutetskii (1976) observation att, när högpresterande elever löser nya problem, så vill de oftast minnas ett liknande problem som de redan har löst. Och även om eleverna inte har behandlat liknande problem förut, så kan de uppleva att de tidigare har "löst" problemet (Krutetskii, 1976). På det sättet är det begripligt att eleverna i denna studie associerade problemen till lösningsmetoder som inte alltid ledde till önskat resultat.

Den kvantitativa sammanställningen av de matematiska förmågornas förekomst visar att det *matematiska minnet* (förmåga 4) är den förmåga som förekommer i minst utsträckning under problemlösningsprocessen. Dessutom visade statistiken att förmågan att *minnas matematisk information* (förmåga 4) uppträder ytterst sällan i isolerad form, dvs. den interagerar oftast med andra förmågor.

Som jag nämnde i föregående avsnitt, visar analysen att den vanligast förekommande kombinationen av förmågor inträffar i problemlösningens inledande fas, då det *matematiska minnet* befinner sig i nära samspel med förmågan att *insamla och formalisera matematisk information* (förmåga 1). Vi har också sett att det matematiska minnets närvaro i problemlösningens inledande fas har viktiga konsekvenser för elevers problemlösning eftersom det är i den fasen eleverna väljer metoder för att lösa problemet. Observationerna underströk också att de valda problemlösningsmetoderna var intimt förknippade med tillhörande procedurer, eftersom det matematiska minnet är resultatet av tidigare generaliseringar och lösningsmetoder som har utvecklats i samband med matematiska aktiviteter (Krutetskii, 1976). Därmed visar studien att eleverna styrdes av både procedurer och generaliserade problemlösningsmetoder under sina matematiska aktiviteter. När lämpliga procedurer saknades i samband med den valda metoden, så började de om på nytt, men behöll metoden.

Analysen visade också att om den valda metoden inte ledde till önskat resultat, så återvände eleverna till fasen då de *insamlar och formaliserar* (förmåga 1) samt *minns matematisk information* (förmåga 4). Efter att de återigen har aktualiserat och analyserat problemets förutsättningar, började de på nytt *bearbeta den matematiska informationen* (förmåga 2) för att sedan på nytt bli osäkra när metoden inte gav önskat resultat. Det som var mest överraskande är att eleverna inte ändrade den valda metoden under hela processen.

Följaktligen är det rimligt att anta att förmågan att *minnas matematisk information* blev avgörande för valet av problemlösningsmetod. Därmed kan vi anta att om elever väljer olämplig metod i problemlösningens inledande fas, så är det inte troligt att de kan lösa det givna problemet.

Men analogin gäller lyckligtvis även åt det motsatta hållet. Den elev (X3) som använde den mest detaljrika lösningsmetoden vid Problem 1, kunde också lösa problemet på det mest effektiva sättet. Hon associerade det givna problemet till en uppgift som hade en annan kontext, men den generaliserade lösningsmetoden var så tydlig med avseende på procedurer, att den tjänade som en konkret problemlösningssmodell under hela processen.

Ovanstående sammanfattning av det matematiska minnets roll under problemlösningen bekräftar delvis Krutetskiis (1976) observation om att det finns många liknande drag mellan förmågan att insamla och formalisera matematisk information och det matematiska minnet. I sin studie understryker Krutetskii, att på samma sätt som förmågan att insamla information är generaliserad, förkortad och flexibel, så är även det matematiska minnet ett minne för generaliserade, förkortade och flexibla metoder och processer (*ibid*, s.352). Följaktligen är det förståeligt att dessa två förmågor samverkar i nära interaktion och inte kan särskiljas under problemlösningens allra första fas med de observations- och analysmetoder som användes i denna studie.

Däremot kunde jag inte finna belägg för Krutetskiis (1976) observation om att det matematiska minnet är ett minne för *flexibla metoder* och *processer*, dvs. att metoder och tillhörande processer kan ändras under problemlösningssprocessen. När elevernas ekvationer vid lösningen av Problem 2 inte ledde till önskat resultat, så agerade eleverna inte flexibelt. Och eleverna var inte heller flexibla med avseende på procedurer som hörde till den valda problemlösningsmetoden. Tvärtom, analysen visar att elever inte klarade av att ändra sin valda problemlösningsmetod, oavsett om metoden upprepade gånger ledde till samma svårigheter.

I den bemärkelsen finns det kanske en mer rimlig förklaring i den biologiska förklarningsmodellen. Eftersom de presenterade problemen var nya för eleverna, så kunde de (utom X1 och X3 vid Problem 1) inte riktigt associera problemen till tidigare lösta uppgifter. På det sättet agerade hjärnbarken (arbetsminnet) enligt sin biologiska funktion, dvs. mötte den nya informationen i förhållande till tidigare kunskaper och erfarenheter (Ingvar, 2009a). Detta medförde att elever började lösa Problem 2 på samma sätt som de är vana att lösa liknande uppgifter, dvs. med hjälp av ekvationer. När formaliseringen ledde till olikheter istället för de förväntade ekvationerna, så passade sekvensen inte in i modellen för hur ekvationslösning ska se ut, vilket ledde till att eleverna återaktualiserade problemets förutsättningar. Men under hela tiden höll de kvar den valda metoden i arbetsminnet, eftersom förmågan att hålla stora mängder information aktuell i arbetsminnet bygger på aktivitet i hjärnbarkens olika associationsområden (Ingvar, 2009a). Följaktligen är det rim-

ligt att anta att eleverna tolkade information i ljuset av sina tidigare erfarenheter, vilket begränsade möjligheten att förstå det som de inte tidigare sett.

Men hjärnbarkens funktion har även den positiva effekten att den påskyndar problemlösningens inledande fas genom att minska antalet möjliga tolkningar. Och eftersom all inlärnin går ut på automatisering (Ingvar, 2009a) så är det kanske lättare att förstå att resultatet av elevernas matematiska minnen, dvs. *generaliserade lösningsmetoder* är förhållandevis rigida under problemlösningen. Det verkar som att eleverna har automatiserat dessa problemlösningsmetoder.

Sammanfattningsvis vill jag poängtera att den presenterade studien endast delvis kan besvara viktiga frågeställningar om de matematiska förmågornas interaktion och det matematiska minnets roll i samband med matematisk problemlösning. Studien kan t.ex. varken visa hur matematiska förmågor interagerar i problemlösningens allra första fas eller på vilket sätt elever generaliserar matematiska samband. För att på ett bättre sätt kartlägga dessa frågeställningar, är det naturligtvis nödvändigt att genomföra ytterligare studier.

I en sådan studie skulle man till exempel kunna observera samma elever i samband med lösning av matematiska problem som kan associeras till problemen som presenterades i denna studie. På så sätt skulle man kunna undersöka om eleverna har generaliserat de lösningsmetoder som de för första gången använde i denna studie.

För att på ett bättre sätt kunna åskådliggöra hur matematiska förmågor interagerar i det empiriska materialets latenta innehåll, så borde det genomföras studier där den matematiska förmågans struktur undersöks med inslag från flera forskningsfält, t.ex. med både *didaktiska* forskningsmetoder och metoder som används inom *kognitiv neurovetenskap*. På så sätt skulle vi möjligtvis kunna besvara de frågeställningar som inte var möjliga att besvara i denna studie.

Möjliga konsekvenser för undervisningen

Studiens resultat och ovanstående sammanfattning av de matematiska förmågornas interaktion och det matematiska minnets roll under problemlösningen indikerar några möjliga implikationer för elevers lärande i skolämnet matematik. En sådan implikation följer av att det förefaller vara meningslöst att differentiera minne från lärande, eftersom ”minne och lärande är som ler och långhalm” (Gärdenfors, 2010, s.56). Elevernas problemlösningsprocesser vittnar om vikten av att elever använder *rätt sorts generaliserade lösningsmetoder*; metoderna bör dels ha en flexibel struktur men de bör också vara konkreta med avseende på procedurer. Alltså är problemlösningens kvalitet beroende av *både* procedurminnen och matematiska (semantiska) minnen.

Men det är också viktigt att inse att dessa typer av minnen är olika och följaktligen svarar de mot olika sorters lärande, med den viktiga konsekvensen att varje respektive typ av minne bör kunna utvecklas med rätt sorts pedagogik. Procedurminnet kräver motorisk träning och mycket repetition, medan det semantiska minnet utvecklas bäst med exempel på vad som hör till ett visst område eller begrepp och vad som inte gör det (Gärdenfors, 2010). För matematikämnet kan detta innebära att elever utvecklar sitt procedurminne med hjälp t.ex. repetition av räknemetoder och algoritmer. Det matematiska minnet kan utvecklas med hjälp av serier av matematiska problem som leder till att eleven upptäcker de huvudskaliga samband som hör till ett visst matematiskt område och på vilket sätt de upptäckta sambanden kan generaliseras.

Denna studie stödjer delvis Skemps teori om att elever bör lära sig matematik *relationsbaserat*, eftersom det leder till djupare förståelse än *instrumentell* inläring som fokuserar *procedurkunskaper* (Skemp, 1976). Men studien visar också att procedurkunskaper är nästan lika viktiga under problemlösningsprocessen som generaliserade samband. Till exempel har vi sett att när formaliseringen leder till olikheter istället för de förväntade ekvationerna, så blir eleverna påtagligt osäkra på den valda metoden och gör enkla misstag i sina beräkningar. Och vi har även fått indikationer på att problemlösningssmetoder inte är flexibla med avseende på tillhörande procedurer. På det sättet ligger studiens resultat i linje med studier (Davis et al., 2000) som förordar en strukturerad matematikundervisning där elevernas procedurkunskaper leder till episodiska minnen som i sin tur underlättar förandet av semantiska (matematiska) minnen.

Min avslutande rekommendation blir att elever bör undervisas på ett sätt som ligger nära matematikens innersta väsen. Elever bör lära sig och repetera procedurer, eftersom procedurer är intimt förknippade med problemlösningssmetoder, men de bör också kunna beskriva hur somliga problemtyper kan lösas och på vilket sätt olika lösningsmetoder relaterar till varandra. Men oavsett vilka didaktiska principer som används i undervisningen, bör elever lära sig att helst använda *allmänna metoder* vid problemlösning. De bör lära sig att matematik handlar dels om att (om det är möjligt) *generalisera* de mönster som vi upptäcker i ett givet material, men matematik handlar också om att vi (vid behov) måste kunna *precisera* våra resultat.

Referenser

- Bentley, P.-O. (2003). *Mathematics teachers and their teaching. A Survey Study*. Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.
- Bergqvist, S. (2003). *Att möta barn i behov av särskilt stöd*. Stockholm: Liber AB.
- Bergsten, C. (2002). Faces of Swedish research in mathematics education. I C. Bergsten, G. Dahland & B. Grevholm (Red.), *Action and research in the mathematics classroom. Proceedings of the Second Mathematics Education Research Seminar* (Madif2). Linköping: SMDF.
- Bergsten, C. (2007). Matematikdidaktikens vägar. *SMDF:s medlemsblad*, 13, 5-19.
- Bibeln. (2010). www.bibeln.se
- Blankertz, H. (1987). *Didaktikens teorier och modeller*. LHS förlag Stockholm.
- Bloom, B. S. & Sosniak, L. A. (1985). *Developing talent in young people*. New York: Ballantine Books.
- Bruner, J. S. (1962). *The process of education*. Harvard University Press.
- Bruner, J. S. (1973). *Beyond the information given: Studies in the psychology of knowing*. New York: Norton.
- Byers, V. & Erlwanger, S. (1985). Content and form in mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 15, 259-275.
- Cassirer, E. (1998). *Die Philosophie der Aufklärung*. Hamburg: Meiner.
- Csíkós, C. & Dobi, J. (2001). Matematikai nevelés (Matematisk uppfostran). I Z. Báthory & I. Falus (Red.), *Tanulmányok a neveléstudomány köréből* (s. 354–372). Budapest: Osiris Kiadó.
- Csikszentmihalyi, M. & Robinson, R. E. (1986). Culture, time and the development of Talent. I R. J. Sternberg & J. E. Davidson (Red.), *Conceptions of Giftedness* (s. 285-306). London: Cambridge University Press.
- Csikszentmihalyi, M. (1990). *Flow: The psychology of optimal experience*. New York: Harper & Row.
- Dahl, T. (2011). *Problemlösning kan avslöja matematiska förmågor: att upptäcka matematiska förmågor i en matematisk aktivitet*. Växjö: Linnéuniversitetet.
- Davis, E. J. (1978). A model for understanding understanding in mathematics. *Arithmetic Teacher*, 9, 40-47.

- Davis, G., Hill, D., & Smith, N. (2000). A memory-based model for aspects of mathematics teaching. I T. Nakahara & M. Koyama (Red.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 2, (s. 225-232). Hiroshima: Hiroshima University.
- Flavell, J. H. (1977). *Cognitive development*. New York: Prentice-Hall.
- Furlong, E. J. (1951). *A study in memory*. London: Nelson.
- Furneaux, W. D. & Rees, R. (1978). The structure of mathematical ability. *British Journal of Psychology*, 69, 507.
- Gagné, R. M. (1970). *Conditions of learning*. New York: Holt, Rinehart & Winston.
- Graneheim, U. H. & Lundman, B. (2004). Qualitative content analysis in nursing research: concepts, procedures and measures to achieve trustworthiness. *Nurse Education Today*, 24 (2), 105-112.
- Gärdenfors, P. (2010). *Lusten att förstå: om lärande på människans villkor*. Stockholm: Natur & Kultur.
- Gyarmathy, É. (2002). Matematikai tehetség (Matematisk talang). *Új Pedagógiai Szemle*, 5, 110-115.
- Haensly, P., Reynolds, C. R., & Nash, W. R. (1986). Giftedness: coalescence, context, conflict and commitment. I R. J. Sternberg & J. E. Davidson (Red.), *Conceptions of giftedness* (s. 128-148). New York: Cambridge University Press.
- Halmos, P. (1981). A matematika szíve (Matematikens hjärta). *Természet Világa*, 10.
- Helmke, A. & Weinert, F. E. (1997). Bedingungsfaktoren schulischer Leistungen. I F. E. Weinert (Red.), *Psychologie des Unterrichts und der Schule. Enzyklopädie der Psychologie. Serie Pädagogische Psychologie* (s. 71-176). Göttingen: Hogrefe.
- Hilgard, E. R. & Atkinson, R. C. (1957). *Introduction to psychology*. New York, Harcourt Brace.
- Howe, K. & Eisenhart, M. (1990). Standards for qualitative (and quantitative) research: A prolegomenon. *Educational Researcher*, 19 (4), 2-9.
- Hultén, A. (2011). *Neural correlates of language learning in adults*. Turku: Åbo Akademi University.
- Hultman, G. (2004). *Anställda i förändring. Flämtande lågor, ambitioner och vardagsarbetet. En longitudinell fallstudie av förändringsprocesser i små- och medelstora företag under sex år*. Linköping: Skapande Vetande.

- Ingvar, M. (2009a). Hjärnbarkens funktion. I L. Olson m.fl. (Red.), *Hjärnan* (s. 29-46). Stockholm: Karolinska Institutet University Press.
- Ingvar, M. (2009b, september). *Hjärnans roll i inlärningen*. Seminarium vid Lärarhögskolan i Stockholm.
- Johansson, B. (1985). Sveriges förste forskare i matematikdidaktik. *Nämnanen*, 3, 6-10.
- Juter, K. & Sriraman, B. (2011). Does high achieving in mathematics = gifted and/or creative in mathematics? I B. Sriraman & K. H. Lee (Red.), *The elements of creativity and giftedness in mathematics* (s. 45-66). Rotterdam: Sense Publishers.
- Kiselman, C. & Mouwitz, L. (2008). *Matematiktermer för skolan*. Göteborg: Nationellt centrum för matematikutbildning (NCM), Göteborgs universitet.
- Klingberg, T. (2007). *Den översvämmade hjärnan*. Stockholm: Natur & Kultur.
- Kress, G. R. & van Leeuwen, T. (2001). *Multimodal discourse: The modes and media of contemporary communication*. London: Oxford University Press.
- Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in school-children*. Chicago: The University of Chicago Press.
- Larsson, S. (2005). Om kvalitet i kvalitativ forskning. *Nordisk Pedagogik*, 24, 19-38.
- van Leeuwen, T. & Jewitt, C. (Red.) (2001). *Handbook of visual analysis*. London: SAGE.
- Leikin, R. (2012, 14 juli). Activities for gifted students. *ICME 12: The 12th International Congress on Mathematical Education*. Seminarium för Topic Study Group 3 i Seoul, Sydkorea.
- Lupowski-Shoplik, A. E., Saylor, M. F., & Assouline, S. G. (1994). Mathematics achievement of talented elementary students: Basic concepts vs. computation. I N. Colangelo, S. G. Assouline & D. Ambrosio (Red.), *Talent development II: Proceedings from the 1993 Henry B. and Jocelyn Wallace National Research Symposium on Talent Development* (s. 409-414). Dayton: Ohio Psychology Press.
- Maasz, J. & Schloeglmann, W. (2006). Introduction. I J. Maasz & W. Schloeglmann (Red.), *New Mathematics Education Research and Practise*. Rotterdam: Sense Publishers.
- Marton, F., Dahlgren, L. O., Svensson, L., & Säljö, R. (1999). *Inlärning och omvärldsuppfattning*. Stockholm: Norstedts Akademiska Förlag.

- Morgan, C. T. & Deese, J. (1957). *How to study*. New York: McGraw–Hill.
- Mönks, F. J. & Ypenburg, I. H. (2009). *Att se och möta begåvade barn*. Stockholm: Natur & Kultur.
- Niss, M. & Højgaard-Jensen, T. (2002). Kompetencer och matematiklärning. *Uddannelsesstyrelsens temahæfteserie*, 18. Köpenhamn: Undervisningsministeriet.
- Norris, S. (2002). The implication of visual research for discourse analysis: transcription. *Visual Communication*, 1 (1), 97-121.
- Nyberg, L. & Bäckman, L. (2009). Det episodiska minnet. I L. Olson m.fl. (Red.), *Hjärnan* (s. 105-114). Stockholm: Karolinska Institutet University Press.
- Osgood, C. E. (1953). *Method and theory in experimental psychology*. London: Oxford University Press.
- Passow, A. H., Mönks, F. J., & Heller, K. A. (1993). Research and education of the gifted in the year 2000 and beyond. I K. A. Heller & F. J. Mönks & A. H. Passow (Red.), *International handbook of research and development of giftedness and talent* (s. 883-903). Oxford: Pergamon.
- Persson, R. (1997). *Annorlunda land. Särbegåvningsens psykologi*. Stockholm: Almqvist & Wiksell.
- Pettersson, E. (2011). *Studiesituationen för elever med särskilda matematiska förmågor*. Växjö: Linnaeus University Press.
- Polya, G. (1957). *Problemlösning*. Stockholm: Prisma.
- Rohracher, H. (1947). *Einführung in die Psychologie*. Wien: Urban & Schwarzenberg.
- Rosca, A. & Zörgő, B. (1973). *A képességek (Förmågorna)*. Budapest: Tudományos Könyvkiadó.
- Schoenfeld, A. (2012, 12 oktober). *Personlig kommunikation*. Hotel Clarion Sign, Stockholm.
- Scopes, P. G. (1973). *Mathematics in secondary schools – A teaching approach*. Cambridge: University Press.
- Sheffield, L. (2003). *Extending the challenge in mathematics*. Thousand Oaks, CA: Corwin Press.
- Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching*, 77, 20-26.
- Skolverket. (2003). *Lusten att lära – med fokus på matematik*. Rapport nr.221. Stockholm: Skolverket.

- Skolverket. (2004). *TIMMS 2003. Svenska elevers kunskaper i matematik och naturvetenskap i skolor 8 i ett nationellt och internationellt perspektiv*. Rapport nr.255. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket. (2007). *PISA 2006 – 15-åringars förmåga att förstå, tolka och reflektera – naturvetenskap, matematik och läsförståelse*. Rapport nr.306. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket. (2009). *TIMSS Advanced 2008 – Svenska gymnasieelevers kunskaper i avancerad matematik och fysik i ett internationellt perspektiv*. Rapport nr.336. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket. (2010a). *Rustad att möta framtiden? PISA 2009 om 15-åringars läsförståelse och kunskaper i matematik och naturvetenskap*. Rapport nr.352. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket. (2010b). *Svenska elevers kunskaper i TIMSS Advanced 2008 och 1995 – En djupanalys av hur eleverna i gymnasieskolan förstår centrala begrepp inom matematiken*. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket. (2011a). *Resultat från ämnesproven i årskurs 9 vårterminen 2011*. Enheten för utbildningsstatistik. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket. (2011b). *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet 2011*. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket. (2011c). *Statens skolverks författningssamling: Förordning om läroplan för gymnasieskolan*. Stockholm: Skolverket.
- Squire, L. R. (2004). Memory systems of the brain: A brief history and current perspective. *Neurobiology of Learning and Memory*, 82, 171-177.
- Sriraman, B. (2003). Mathematical giftedness, problem solving and the ability to formulate generalizations. *The Journal of Secondary Gifted Education*, 14 (3), 151-165.
- Sternberg, R. J. (1998). Abilities are forms of developing expertise. *Educational Researcher*, 27 (3), 11-20.
- Strässer, R. (2005). *An overview of research on teaching and learning mathematics*. Stockholm: Vetenskapsrådet.
- Szabo, A., Larson, N., Viklund, G., & Marklund, M. (2009). *Origo Matematik kurs AB*. Stockholm: Bonnier utbildning.
- Tannenbaum, A. J. (1986). Giftedness: A psychological approach. I R. J. Sternberg & J. E. Davidson (Red.), *Conceptions of giftedness* (s. 21-52). New York: Cambridge University Press.
- Tengstrand, A. (2008). Tvånget att precisera och friheten att generalisera. I C. Kiselman & L. Mouwitz (Red.), *Matematiktermer för skolan*,

- (s. 292-296). Göteborgs universitet: Nationellt Centrum för Matematikutbildning.
- Tóth, L. (2000). *Pszichológia a tanításban* (Psykologi i undervisningen). Debrecen: Pedellus Tankönyvkiadó.
- Ullman et al., (1997). A neural dissociation within language: Evidence that the mental dictionary is part of declarative memory, and that grammatical rules are processed by the procedural system. *Journal of Cognitive Neuroscience*, 9 (2), 266-276.
- Utbildningsdepartementet. (2010). *Förordning om ämnesplaner för de gymnasiegemensamma ämnena*. Stockholm: Regeringen.
- Vetenskapsrådets forskningsetiska principer (2009, 21 oktober). www.vr.se
- Vincze, Sz. (2003). A matematikai képesség összetevőinek vizsgálata és kapcsolata az intelligenciával (Undersökning av den matematiska förmågens komponenter och dess koppling till intelligens). *Magyar pedagógia*, 103 (2), 229-261.
- Vincze, Sz. & Márton S. (2004). A kreatív gondolkodás megjelenése a matematikai teljesítményben (Det kreativa tänkandets närvaro i den matematiska prestationen). *Új pedagógiai szemle*, 04-05.
- Weinert, F. E. (Red.). (1998). *Entwicklung im Kindesalter – Bericht über eine Längsschnittstudie*. Weinheim: Beltz.
- Wistedt, I. (2005). En förädrad syn på matematikbegåvingar? *Nämnaaren*, 3, 53–55.
- Wistedt, I. & Lagergren, R. (2006). Pedagogik för elever med intresse och fallenhet för matematik. *Nämnaaren*, 3, 16–21.
- Woodworth, R. S. & Schlossberg, H. (1954). *Experimental psychology*. New York: Holt.
- Ziegler, A. (2010). *Högt begåvade barn*. Stockholm: Nordstedts.
- Öystein, H. P. (2011). What characterizes high achieving students' mathematical reasoning? I B. Sriraman & K. H. Lee (Red.), *The elements of creativity and giftedness in mathematics*, (s. 193-216). Rotterdam: Sense Publishers.

Bilagor

Bilaga 1

Brev till elever och deras målsmän

Till berörda målsmän och elever

Svenska elevers matematikkunskaper är på många sätt uppmärksammade i media. Oftast handlar det om brister i elevers kunskaper och i de flesta rapporter som skrivits om elevers matematikkunskaper är forskare och utvärderare överens om att kunskaperna har försämrats både sedda i nationellt och i internationellt perspektiv.

Som en motvikt till detta vill jag informera er om ett betydelsefullt forskningsprojekt som studerar hur elever lär sig matematik samt hur de agerar i olika matematiska aktiviteter. Projektet är finansierat av Vetenskapsrådet och handlar om forskning om elever med särskild fallenhet för matematik. Projektledare är professor Inger Wistedt vid Institutionen för matematikämnets och naturvetenskapsämnenas didaktik (MND), Stockholms universitet. Min studie, som är en del av det nämnda forskningsprojektet, avser att tydliggöra den matematiska förmågans uttryck vid problemlösning och begreppsbildning i matematik hos elever med särskild fallenhet för ämnet. Genom att studera dessa elevers arbete med matematikproblem har vi goda förhoppningar om att komma fram till resultat som kan främja lärandet för alla elever i skolämnet matematik.

Egentligen finns det ingen enhetlig definition av vad som utmärker elever med särskild fallenhet för matematik. Därför har jag valt ut några elever som enligt min uppfattning visar särskild fallenhet för ämnet. Ert barn ingår i det urvalet och jag hoppas att ni vill ge ert godkännande till att han medverkar i projektet.

Jag arbetar på Utbildningsförvaltningen i Stockholms stad med utvecklingsfrågor i matematik och är forskarstuderande vid institutionen för MND, Stockholms universitet. Studien kommer att genomföras vid två–tre tillfällen fördelade över två år. Vid dessa tillfällen kommer eleverna, under högst en timme, att få arbeta med matematiska problem där jag kommer att lyssna till och dokumentera deras resonemang. Eventuella intervjuer med eleverna kommer att genomföras individuellt. Till min hjälp kommer jag att använda ljudinspelning samt anteckningar i samband med problemlösning för att i efterhand lättare kunna bearbeta informationen från elevernas arbete med problemen. Naturligtvis kommer fingerade namn att ges elever, lärare och skola för att på så sätt omöjliggöra identifiering och värna elevernas integritet. Eleverna har också rätt att avbryta sin medver-

kan om de så önskar. Jag kommer att förvara allt material i låst arkivskåp under tiden projektet pågår. När forskningsprojektet är avslutat raderas ljudinspelningar och annat insamlat material.

Om ni undrar över något är ni välkomna att ringa eller skriva till mig.

Med vänliga hälsningar

Attila Szabo

Institutionen för MND vid Stockholms universitet

attila.szabo@stockholm.se

tel. 070 716 15 61

Godkännande av medverkan i forskningsarbete om elever med särskild fallenhet för matematik

Barnets

namn: _____

Skola: _____

Klass: _____

Var god sätt kryss för godkännande:

☐ Jag tillåter ljudinspelning då mitt barn är närvarande.

☐ Jag tillåter att ni använder material från inspelningarna i forskningsändamål, i enlighet med Vetenskapsrådets etiska forskningsregler (för en utförlig beskrivning av reglerna se <http://www.codex.vr.se/texts/HSFR.pdf>).

Målsmans underskrift:

(vid gemensam vårdnad ska båda vårdnadshavarna underteckna)

Blanketten lämnas till elevens matematiklärare senast den 12 maj 2010.

Tack!

Attila Szabo

Bilaga 2

Instruktioner till elever inför problemlösningen

Det är roligt att du vill delta i undersökningen!

Oftast är det inga konstigheter kring en sådan här undersökning, men det brukar ändå kännas extra spännande när man deltar för första gången. För att göra det enklare för dig, så har jag samlat några saker som du kan tänka på i samband med att du löser uppgifterna.

- Slappna av, ingen kommer att bedöma dina kunskaper – det är din medverkan som är viktig.
- Vi är inte intresserade av hur bra du löser uppgiften eller hur lång tid det tar att lösa den – vi är endast intresserade av det som händer under lösningsprocessen.
- Skriv ner allt som du kommer på i samband med uppgiften – oavsett om du tycker att det är korrekt eller inte.
- Du behöver inte förklara hur du tänker eller reflektera över det du tänker på – säg bara högt det du tänker på medan du försöker lösa uppgiften.
- Försök att tänka högt – ungefär som om du var helt ensam och dina tankar talade till dig.

Stort tack för din medverkan!
Attila

Rapporter i matematikämnets och naturvetenskapsämnenas didaktik

Redaktörer: Astrid Pettersson och Per-Olof Wickman

1. Persson, Lena (2011). En aktionsforskningsstudie om undervisning och lärande för hållbar utveckling. (licentiatavhandling)
2. Lindahl, Camilla & Molander, B-O (2011). Kemiförsök i en tvåspråkig miljö. Ett samarbetsprojekt mellan en specialskola för döva och hörselskadade och Stockholms universitet om NO-undervisning med skolutvecklingsprogrammet NTA.
3. Flodin, Veronica (2011). Epistemisk drift: Genbegreppets rörelser i några av forskningens och undervisningens texter i biologi. (licentiatavhandling)