RATIONELLA TAL SOM TAL
ALGEBRAISKA SYMBOLER OCH GENERELLA MODELLER SOM MEDIERANDE REDSKAP.

Helena Eriksson

Licentiatuppsats

Rapporter i matematikämnets och naturvetenskapsämnenas didaktik

Nummer 6, 2015

Stockholms universitet

Rationella tal som tal

Algebraiska symboler och generella modeller som medierande redskap.

Helena Eriksson

Rationella tal som tal
Algebraiska symboler och generella modeller som medierande redskap.

Licentiatuppsats
Forskarskolan i Learning Study - undervisningsutvecklande ämnesdidaktisk forskning
Institutionen för matematikämnets och naturvetenskapsämnenas didaktik
Stockholms universitet

ISBN 978-91-7649-122-5

Tryckeri: Publit Sweden AB, Stockholm 2015
Distributör: Institutionen för matematikämnets och naturvetenskapsämnenas didaktik

Abstract

In this study the teaching of mathematics has been developed in relation to rational numbers and towards a learning activity. At the same time topic-specific mediated tools have been studied. The iterative model for learning study has been used as research approach.

The purpose of the study was to explore what in an algebraic learning activity enables knowledge of rational numbers to develop. The specific questions answered by the study are how an algebraic learning activity can be formed in an otherwise arithmetic teaching tradition, what knowledge is mediated in relation to different mediated tools and what *in* these tools that enable this knowledge.

The result of the study shows how an algebraic learning activity can be developed to support the students to understand rational numbers even in an arithmetic teaching tradition. The important details that developed the algebraic learning activity were to identify the problem to create learning tasks and the opportunity for the students to reflect that are characteristic of a learning activity. The result also shows that the mediating tools, the algebraic symbols and the general model for fractional numbers, have had significant importance for the students' possibilities to explore rational numbers. The conditions for the algebraic symbols seem to be the possibilities for these symbols to include clues to the meaning of the symbol and that the same symbol can be used in relation to several of other mediated tools. The conditions in the general model consisted of that the integer numbers and the rational numbers in the model could be distinguished and that the students could reflect on the meaning of the different parts. The general model consists of the algebraic symbols, developed in the learning activity. The algebraic symbols make the structure of the numbers visible and the general model mediates the structure of additive and multiplicative conditions that are contained in a rational number.

The result of the study contributes in part to the field of mathematics education research by examining Elkonin's and Davydov's Mathematical Curriculum in a western teaching practice and in part to a development of the model of Learning study as a didactical research approach by using an activity-theoretical perspective on design and analysis.

Sammanfattning

I arbetet med följande licentianduppsats har ett lärararbetslag arbetat med att utveckla matematikundervisningen för att synliggöra rationella tal som tal. Undervisningspraktiken har utvecklats i riktning mot en algebraisk lärandeverksamhet, samtidigt som de ämnesspecifika medierande redskap som tagits i bruk har studerats. Den iterativa modellen för learning study har använts som forskningsansats.

Studien visar ett exempel på hur en algebraisk lärandeverksamhet kan stötta elever att urskilja rationella tal som tal även om eleverna tidigare utvecklat matematiskt kunnande i en aritmetisk undervisningstradition. Studiens resultat visar också att de medierande redskap som är utmärkande för en algebraisk lärandeverksamhet, algebraiska symboler och generella modeller, utgör särskilda möjligheter för eleverna att utforska dessa tal. De särskilda möjligheterna består i att de algebraiska symbolerna medierar strukturen i rationella tal när eleverna får vara med och etablera symbolerna. Symbolerna blir då att innehålla ledtrådar till innebörden i den placering symbolen har i en generell modell för rationella tal. Kunnande om rationella tal som synliggörs i den generella modellen är de additiva och multiplikativa förhållandena i talen. Det är diskussioner *om* dessa förhållanden som möjliggörs av att elevernas algebraiska symboler används i den generella modellen. De algebraiska symbolerna bör enligt studien användas tillsammans med flera medierande redskap.

Resultatet av studien medverkar dels till det matematikdidaktiska forskningsfältet genom att undersöka Elkonins och Davydovs matematikdidaktiska program utifrån en algebraisk lärandeverksamhet i en västerländsk undervisningspraktik och dels till en metodutveckling av learning study som ämnesdidaktisk forskningsansats genom att använda lärandeverksamhet som lärandeteoretiskt ramverk i design och analysarbetet.

Keywords: Rational numbers, learning study, learning activity, mathematics education

Innehåll

1. INTRODUKTION OCH DISPOSITION AV UPPSATSEN 11

2. ÄMNESDIDAKTISK BAKGRUND 14

2.1 Lärandeobjekt 14

2.2 Undervisningstraditioner 14

2.3 Rationella tal – en ämnesdidaktisk innehållsanalys 22

2.4 Matematikdidaktisk forskning om rationella tal 27

3. PROBLEMFORMULERING 35

3.1 Syfte och forskningsfrågor 36

4. TEORETISKT RAMVERK 37

4.1 Val av teoretiskt ramverk 37

4.2 Verksamhetsteori 37

4.3 Didaktisk inriktning 38

5. METOD 44

5.1 Learning study 44

5.2 Grunddesign av forskningslektionerna 46

5.3 Grunddesign av lärandeuppgifter 46

5.4 Dataproduktion 51

5.5 Kartläggningsarbetet i learning studyarbetet 55

5.6 Analysprocessen 62

6. ANALYSRESULTAT 64

6.1 Den framväxande lärandeverksamheten 64

6.2 Redskapsmedierande handlingar 95

6.3 Villkor för mediering 105

7. DISKUSSION 111

7.1 Resultat- och metoddiskussion 111

7.2 Slutsatser och implikationer för undervisning 117

8. REFERENSER 119

Förord

Ett uppsatsarbete närmar sig slutet. För att detta arbete varit möjligt att genomföra behöver jag egentligen tacka alla jag överhuvudtaget känner. Ett första stora varma tack till de lärare och elever som tålmodigt deltagit i de learning study-projekt som ligger till grund för uppsatsen. Samma inledande tack riktar jag även till skolchef och rektor som beviljade idén om att genomföra detta arbete. Hoppas jag kan göra rätt för den tid och den möjlighet ni gett mig. Ingrid Carlgren och Ference Marton sa vid ett lunchbord i januari 2012 ”Gör något som ingen annan gjort”… sagt och gjort… nu har jag försökt. Hoppas mitt arbete kommer till nytta.

Ett uppsatsarbete innebär att försöka förstå något ur en situation på ett sätt som det tidigare inte blivit förstått. Det gäller dessutom att få andra att förstå det som blivit förstått. Arbetet har i varje stund varit intressant, spännande och extremt givande, och det har inte alltid varit lätt. Vid åtskilliga tillfällen har det utvecklats nya frågor att ta tag i och fundera över. Ett stort tack till mina handledare Torbjörn Tambour och Inger Eriksson som genom hela arbetet inspirerat och stöttat arbetet med dessa frågor. De eminenta läsarna av texter jag producerat till olika seminarier, bland annat seminariet på Mallorca Mona Holmqvist och Angelika Kullberg och till 90 % seminariet Lisa Björklund Boistrup och Viveca Lindberg, tack. Mitt intresse för learning study väcktes i en kurs på specialpedagogprogrammet vid Stockholms universitet som resulterade i en magisteruppsats i specialpedagogik. Uppsatsen använde learning study som forskningsansats. Tack Diana Berthén för handledning i det arbetet.

Alla lärare och deltagare i forskarskolan, tack för all respons och alla intressanta och invecklade diskussioner. Ni lärare och handledare med Ulla Runesson i spetsen som på ett så föredömligt sätt tagit hand om oss, Roger, Åsa, Malin, Patrik, Anna, Anders, Andreas, Anja, Clare, Jenny, Ulf, Joakim, Helen och Per. Nu är vi beredda att förändra undervisning på riktigt. Institutionen, MND på Stockholms universitet som från första dagen fått oss licentiander att känna oss välkomna och betydelsefulla. Tack för engagemang, seminarier och diverse diskussioner vid fikabordet.

Familjen hemma i Gustafs, tack för allt stöd. Lasse, tack för din trygga och lugna närvaro. Anton och Arvid jag tror på er lika mycket som ni trott på mig under det här arbetet.

Gustafs, vid Dalälvens strand, februari 2015
Helena Eriksson

1. INTRODUKTION OCH DISPOSITION AV UPPSATSEN

Föreliggande uppsatsarbete bygger på en empirisk studie av ett utvecklingsarbete där ett lärararbetslag arbetat med modellen learning study för att förändra och utveckla undervisning om rationella tal tillsammans med elever i årskurs fyra. Studiens resultat baserar sig på analyser av elevernas och lärarnas gemensamma arbete med rationella tal.

Rationella tal, såsom exempelvis tal i bråkform och tal i decimalform, utgör ett område inom matematikundervisningen vi i lärararbetslaget upplevt svårigheter att undervisa om. Vi upplever att uppgifter vi använder i undervisningen bjuder in till att våra elever hittar lösningar på en mängd uppgifter, men att det är svårt att få igång diskussioner tillsammans med eleverna om egenskaper och strukturer i dessa tal. Att lärare tycker det är svårt att undervisa om dessa tal bekräftas av tidigare matematikdidaktisk forskning (se bland annat Kullberg, 2010). Analys av elevsvaren på de nationella proven (elever i årskurs 3 på skolan som deltog i studien) visar att eleverna har sämre lösningsfrekvens på uppgifter med dessa tal än på andra uppgifter. Att elever har svårt att utveckla förståelse av dessa tal bekräftas av tidigare forskningsstudier (se Mack, 1993). Resnick och Singer (1993) påstår till och med att många elever aldrig kommer att utveckla någon djupare förståelse av detta talområde. Att det kan vara så ses som problematiskt eftersom både barns och vuxnas värld är fyllda med exempelvis tal i decimalform, tal i bråkform, tal i procentform, samt proportionella samband där förståelse av rationella tal är en nödvändighet (Davydov & TSvetkovich, 1991; Vergnaud, 1988). Innebörder i rationella tal samt förmågor och kunnande förknippade med dessa tal vidareutvecklas i uppsatsens kapitel 2.

Problemformulering samt syfte och frågeställningar presenteras i kapitel 3.

Matematikundervisning tar form utifrån kulturella undervisningstraditioner och teoretiska perspektiv. Van Oers (2001) menar att traditioner inom matematikundervisningen grundas i deltagarnas olika uppfattningar av matematik, uppfattningar av hur lärande går till, samt av vilka uppgifter som tar form i undervisningen. Matematikundervisning kan enligt van Oers ta form på tre skilda sätt; såsom aritmetisk, strukturell eller problemlösande.

Mycket kortfattat kan en aritmetisk tradition förstås som att läraren beskriver och tränar eleverna i aritmetiska operationer. En strukturell tradition förstås som att kunnande och förståelse i matematik på något vis konstrueras av eleverna. En problemlösande tradition slutligen förstås som att kunnande utvecklas genom elevernas deltagande i problemlösning med stöd av medierande redskap. Den sistnämnda, problemlösande, traditionen beskriver van Oers " 'Mathematics' as a subject matter is really about problem solving activity with symbolic tools"(van Oers, 2001 s.63.). Denna tradition likställer van Oers med den beskrivning Davydov (2008/1986)[1] ger av en algebraisk lärandeverksamhet, vilket är det teoretiska perspektiv som grundar detta uppsatsarbete. Olika matematiska undervisningstraditioner diskuteras i kapitel 2, och en teoretisk bakgrund till den algebraiska lärandeverksamheten presenteras i kapitel 4.

I studien använder ett lärararbetslag modellen learning study för att förändra en undervisningspraktik genom att försöka utveckla en algebraisk lärandeverksamhet. Lärarnas förändringsarbet sker parallellt med att learning study används som kvalitativ forskningsansats för att besvara tre frågeställningar i relation till vilket kunnande om rationella tal som görs möjligt i de lektioner som utvecklas. När undervisning behöver förändras är det vanligt att lärare känner sig utlämnade till att grunda förändringsarbetet i egna erfarenheter av undervisning. Det är svårt att hitta dokumentation av andra lärares erfarenheter. Carlgren (2012) menar att forskningsresultat som speglar undervisningens egna villkor är begränsad. När det gäller att förändra en undervisning skriver Carlgren och Marton (2001) att det uppstått ett glapp mellan den undervisningsforskning som produceras och de förändringar som sker av undervisningspraktiken. En orsak till detta glapp, kan enligt Carlgren och Marton vara att forskning om undervisning ofta görs på lärare som forskningsobjekt av utomstående forskare som genom observationer eller intervjuer studerar praktiken. Lärarnas egna frågor och lärares tysta kunnande (jfr Polanyi, 1963) gällande exempelvis planering och genomförande av undervisning riskerar att hamna i skymundan i forskningen. Olika forskningsansatser har därför utvecklats där undervisningspraktikens egna frågor står i centrum (Carlgren, 2012). Exempel på sådana forskningsansatser utgörs av aktionsforskning (Elliott, 1991; Rönnerman, 2011), teacher reserach (Cohran-Smith & Lytle, 1999) designexperiment (Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer & Schauble, 2003), lesson study (Fernandez & Yoshida, 2004; Stigler & Hiebert, 1999), samt learning study (Pang & Marton, 2003). Learning study kan ses som en hybrid av aktionsforskning, designexperiment och lesson study (Carlgren, 2012; Elliott, 1991, 2012). Modellen kännetecknas av att den är kollaborativ, fokuserad på ett specifikt ämnesinnehåll, interventioner i undervisningen

[1] Första upplagan1986, nyutgåva 2008.

grundas i ett teoretiskt ramverk för lärande, samt att arbetsprocessen är iterativ (Pang & Marton, 2003). I ett learning study-arbete analyseras ett specifikt kunskapsinnehåll och en specifik förmåga genom att beakta tidigare forskning och lärarnas erfarenheter av vad elever kan ha svårt att lära sig. I den iterativa processen planeras, genomförs, analyseras och revideras lektioner för att sedan genomföras och revideras på nytt (Holmqvist, 2006). Varje lektion genomförs med olika elevgrupper som man kan misstänka att befinner sig på ungefär samma undervisningsnivå. Forskningen sker på så vis på plats i den miljö där undervisningen sker och drivs i olika utsträckning av de frågor lärare ställer i sin egen praktik (Carlgren, 2012; Stenhouse, 1981). Carlgren (2012) menar därför att learning study kan användas som forskningsansats för undervisningsforskning. Ansatsen skiljer sig från många andra kvalitativa ansatser genom de professionella lärarnas medverkan. Hur learning study använts som modell för ämnesdidaktisk forskning i denna uppsats utvecklas i kapitel 5, metodkapitlet.

Utvecklingen av lektionerna syftade till att öka elevernas möjligheter till deltagande i det Vygotsky beskriver som utveckling av teoretiska begrepp. Inspiration till detta arbete hämtas i Elkonin och Davydovs matematikdidaktiska program och Davydovs (2008) beskrivningar av en lärandeverksamhet. Även Kinard och Kozulins (2012) beskrivningar av ämnesspecifika redskap samt Schmittau och Morris studie om generella modeller för rationella tal från 2000 användes som inspirationskällor. I kapitel 6 presenteras resultatet för hur en algebraisk lärandeverksamhet växte fram och vad i denna verksamhet som gav möjlighet för eleverna att erfara rationella tal som tal. Resultatet diskuteras i kapitel 7.

2. ÄMNESDIDAKTISK BAKGRUND

> Mathematicians from Klein to Freudenthal and psychologists like Piaget and Davydov have concerned themselves explicitly with educational problems of learning about fractions. (Streefland, i T. Carpenter, E. Fennema och T. Romberg, 1993, s. 289)

I detta bakgrundskapitel presenteras först begreppet lärandeobjekt utifrån att det är ett centralt begrepp i arbetet i en learning study. Därefter diskuteras olika matematiska undervisningstraditioner, följt av en ämnesdidaktisk innehållsanalys av lärandeobjektet att urskilja rationella tal som tal. Kapitlet avslutas med en presentation av tidigare forskning rörande rationella tal.

2.1 Lärandeobjekt

I föreliggande studie gestaltas rationella tal i en undervisning som förändras och utvecklas i den iterativa modellen för learning study. Det specifika eleverna förväntas lära beskrivs som ett lärandeobjekt (jfr Marton & Booth, 1997), det vill säga som ett specifikt innehåll i en undervisning sammankopplat med en specifik förmåga och knutet till en specifik elevgrupp (Holmqvist, 2006). På så vis utgår arbetet i en learning study från den aktuella elevgruppen och riktas mot ett specifikt kunskapsinnehåll vilket benämns direkt lärandeobjekt kopplat till den förmåga och det kunnande som elevgruppen behöver bemästra vilket benämns indirekt lärandeobjekt (Marton, Runesson & Tsui, 2004). Förmågor som gestaltar ett kunskapsinnehåll beskriver Carlgren (2011) som en dialektisk relation mellan fakta, förståelse, färdighet och förtrogenhet där dessa så kallade fyra ”f:en” finns utan inbördes hierarki. Ytterligare ett sätt att beskriva ett lärandeobjekt kan vara möjligt med hjälp av det tredelade dialektiska kunskapsbegreppet Carlgren (2011) beskriver som kunskap, kunnande och kunnighet, där kunskap, kunnande och kunnighet relaterar till varandra, och är ömsesidigt beroende av varandra (a.a.). Kunskap kan motsvara det direkta lärandeobjektet, kunnande kan motsvara det indirekta lärandeobjektet och kunnighet kan motsvara den elevgrupp som ska arbeta med lärandeobjektet.

2.2 Undervisningstraditioner

Hur kan man förändra en undervisning som fokuserar ett lärandeobjekt utifrån att lärandeobjektet beskrivs som *direkt och indirekt* utifrån en aktuell *elevgrupp* (jfr Marton & Booth, 1997; Marton, Runesson, & Tsui, 2004).

Devlin (2009) menar att möjligheten att förändra en undervisning finns i att traditioner som grundar undervisningen medvetandegörs och beskrivs. Samtidigt menar Devlin att en undervisningstradition kan medvetandegöras genom att den förändras.

2.2.1 Matematikdidaktiska traditioner

Undervisning i matematik har i stora drag analyserats, och beskrivits, utifrån att elever antingen lär sig genom individuella tankekonstruktioner av psykologisk natur med Piagets teorier som grund eller genom processer i ett sociokulturellt sammanhang härrörande till teorier formulerade av Vygotsky. I kontrast till en sådan dikotomi utvecklades under senare delen av 90-talet försök att analysera och beskriva undervisningstraditioner genom att koordinera olika delar av dessa perspektiv (se exempelvis Cobb & Yackel, 1996; Sfard, 1998). Cobb m.fl. menade att analys av en matematikundervisning i syfte att förstå vilket kunnande som möjliggörs kräver aspekter från både ett psykologiskt och ett sociokulturellt perspektiv. Cobb m.fl. utvecklade tre enheter för analys, nämligen; de tankar som eleverna beskriver om sitt deltagande i matematiken, vad som räknas som matematiska diskussioner, samt de möjligheter som erbjuds att bearbeta olika lösningsförslag som uppkommer i undervisningen. Sfard (1998) å sin sida menade att undervisning kan beskrivas både som ett deltagande i olika praktiker ”participation” och som att förvärva ett kunnande ”acquisition”. En diskussion som Sfard för är hur man genom en beskrivning av en undervisning, begränsar undervisningen till just den beskrivningen. Sfard (1998) är därför tydlig med att både metaforen participation och metaforen acquisition behövs för att beskriva undervisningspraktiker. Sfard menar att lärande av något sker via deltagande i något.

Olika undervisningstraditioner i matematik finns beskrivna där rationella tal fokuseras som ett kunskapsinnehåll. Ett exempel presenteras av Brousseau, Brousseau och Warfield (2004) där spel och specifika didaktiska situationer utgör möjligheter att utveckla matematiska förmågor med dessa tal. Ur de didaktiska situationerna synliggörs matematiska regler för eleverna. En annan tradition beskrivs av Isoda och Nakamura (2010) där elever gemensamt ska lösa problem genom gruppdiskussioner. Elevernas gruppdiskussioner föregår en gemensam genomgång, där kvaliteter och brister i olika elevlösningar diskuteras i helklass med läraren som samtalsledare. Brousseau (1997), Davydov och TSvetkovich (1991), Mason (1996) och van Oers (2001) presenterar ett sätt att kategorisera matematikundervisning såsom aritmetisk tradition respektive algebraisk tradition. Mer om dessa två traditioner i nästkommande avsnitt.

I olika kursplaner som fungerat som styrdokument för den svenska skolan sedan enhetsskolans införande finns kunnande av rationella tal framskrivet (se Skolverket Lgr 62, Lgr 69, Lgr 80, Lpo 94 & Lgr 11). Tal i bråkform och tal i decimalform skrivs i Lgr 62 fram som ”Uppfattning och beteckning av de hela talen till och med en miljard, bråk med små nämnare och decimaltal med tiondelar, hundradelar och tusendelar” (Lgr 62, s.165). I Lgr 69 däremot, står decimaltalen särskilt framskrivna medan tal i bråkform endast ryms inom benämningen rationella tal. I Lgr 62 och Lgr 69, var det i huvudmomenten för mellanstadiet och högstadiet som rationella tal nämndes för första gången. I Lgr 80 i kapitlet om reella tal finns tal i bråkform framskrivet för lågstadiet och mellanstadiet genom förmuleringen ”Bråk som 1/2 och 1/3 tas upp och storleksordnas laborativt” (Lgr 80, s. 102) En fortsatt förskjutning av undervisning om rationella tal mot lägre åldrar kan ses i Lpo 94 där tal i bråkform finns med som uppnåendemål i slutet av årskurs fem. Ett mål att uppnå i årskurs fem formulerades ”ha en grundläggande taluppfattning som omfattar naturliga tal och enkla tal i bråk- och decimalform” (Lpo 94, s.34.) En förändring från och med Lpo 94 var även att de mål som står skrivna i styrdokumenten rörande rationella tal gällde samtliga elever i grundskolan, inte som i tidigare kursplaner där endast de ”flesta eleverna” eller de elever som valt ”särskild kurs” på högstadiet, istället för den något mer begränsade ”allmän kurs”, skulle undervisas om dessa tal.

Enligt Skolverkets Lgr 11 ska eleverna i svensk grundskola i årskurs 4 som läser enligt det obligatoriska skolväsendets läroplan arbeta med ett centralt innehåll som formuleras ”Rationella tal och deras egenskaper. Positionssystemet för tal i decimalform. Tal i bråk- och decimalform och deras användning i vardagliga situationer. Centrala metoder för beräkning med naturliga tal och enkla tal i decimalform […] ” (Lgr 11 s. 64). Detta innehåll ska eleverna arbeta med för att utveckla förmågor att till exempel formulera och lösa problem, beskriva begrepp, välja lämpliga metoder, föra resonemang, samt att argumentera för matematiska lösningar och metoder med rationella tal. I kunskapskraven för årskurs tre finns följande skrivet ”Eleven visar grundläggande kunskaper om tal i bråkform genom att dela upp helheter i olika antal delar samt jämföra och namnge delarna som enkla bråk” (Lgr 11 s. 67).

2.2.2 Aritmetisk respektive algebraisk undervisningstradition

I det följande ges en beskrivning av vad som kan ses som en aritmetisk respektive en algebraisk undervisningstradition. Avsikten är inte att jämföra eller värdera de två traditionerna, utan beskrivningen utgör en grund för att förstå det teoretiska ramverk som grundar förändringsarbetet i learning study-arbetet.

Aritmetisk undervisningstradition

I en aritmetisk undervisningstradition kan numeriska siffror och beräkningar med dessa siffror ses som ingången för att förstå den mest grundläggande matematiken (Davydov 2008; Kieran, 2006; Mason, 1996; van Oers, 2001; Schmittau, 2003). För att utveckla eleverna att utveckla taluppfattning gällande rationella tal i den aritmetiska traditionen fokuseras olika aspekter av numeriska exempel, exempelvis delar av olika helheter. Flera aspekter av taluppfattning som är viktiga för att förstå rationella tal i den aritmetiska traditionen presenteras i avsnittet om tidigare forskning (se avsnitt 2.4.1). I den aritmetiska traditionen betonas elevernas empiriska värld som viktig (Davydov, 2008). Exempelvis kan taluppfattning rörande de hela talen utvecklas från ramsräkning, operationer med talen och ett arbete som fokuserar på antalsuppfattning (Löwing, 2010; McIntosh, 2008). Taluppfattning av rationella tal utvecklas därefter genom uppdelning av helheter i olika bråkdelar, ofta utifrån tal mellan 0 och 1 (a.a.). Kieran (2004) beskriver att taluppfattning i den aritmetiska traditionen fokuserar beräkningar och svar på enskilda uppgifter.

Problemlösning i den aritmetiska traditionen fokuserar gärna olika lösningsprocesser för problem (Kieran, 2004). Larsson och Ryve (2012) beskriver exempelvis hur lösningsprocesser kan gestaltas på olika vis, som olika praktiker, där antingen läraren bestämmer en lösningsmodell som eleverna sedan ska härma eller en undervisningspraktik där elevernas förslag tas omhand i lektionen. Problemlösning kan även fokuseras så som Polya (1945) eller som Taflin (2007) beskriver. Polya har kategoriserat olika lösningsstrategier, exempelvis att rita en bild, att göra en eller flera beräkningar, att hitta ett mönster, att arbeta baklänges etcetera. Taflin har utvecklat specifika uppgifter som benämns ”rika problem”. I arbetet med rika problem utgör generella modeller lösningen på ett problem (se Taflin, 2007). Eleverna förväntas se mönster ur numeriska exempel, och med stöd av dessa mönster formulera en formel som svarar mot lösningen av dessa exempel.

Undervisning i algebra i den aritmetiska traditionen fokuserar enligt Kieren (2006) ofta på 1) ekvationer där obekanta ska beräknas, 2) att ange faktorer i generella geometriska formler, samt 3) att ange numeriska regler. Usiskin (1988) förklarar undervisningen i algebra i denna undervisningstradition med fyra olika syften; 1) algebra som generaliserad aritmetik, 2) algebra för att lösa vissa matematiska problem, 3) algebra för att studera relationer mellan olika kvantiteter, samt 4) algebra för att studera olika strukturer. Undervisning i en aritmetisk tradition fokuserar ofta ett rätt svar, exempelvis ett numeriskt svar istället för att fokusera en formel som beskriver en lösning (Brousseau, 1997; Kieran, 2004; MacGregor & Price, 1999; Mason, 1996).

Algebraisk undervisningstradition

I en algebraisk tradition utvecklas en förståelse av matematik och därmed även förståelse av tal på annat sätt än i en aritmetisk tradition. Ett matematikdidaktiskt program för de yngsta skoleleverna utvecklat av Elkonin och Davydov används ofta som ett exempel på en algebraisk tradition. Programmet beskrivs mer ingående längre fram i detta avsnitt.

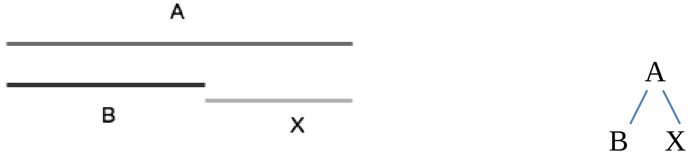
I en algebraisk tradition utvecklas matematiska förmågor via problemlösande arbete med stöd av medierande redskap (Davydov, 2008/1986; Kozulin, 2003; Mason, 1996; Schmittau, 2003; Sophian, C., Garyantes, D., & Chang, C., 1997; van Oers, 2001; Veneciano & Dougherty, 2014). Mason (1996) beskriver den algebraiska traditionen som generaliserad aritmetik med ett eget sätt att tänka, med egna aktiviteter och egna redskap. Mason menar att det med stöd av algebra finns möjligheter att synliggöra grundläggande samband och relationer inom aritmetiken. Möjligheten att synliggöra teoretiska samband inom matematiken förklarar Veneciano m.fl. (2014) som den algebraiska traditionens styrka. Schmittau (2005) menar att det i en algebraisk lärandeverksamhet finns möjlighet att utveckla ett kunnande som motverkar det Skemp (1976) beskriver som en instrumentell förståelse, till förmån för det som Skemp i samma text beskriver som en relationell förståelse av ett kunskapsinnehåll. En instrumentell förståelse beskriver Skemp som att elever kan utföra operationer med tal enligt inlärda regler och procedurer. Med en instrumentell förståelse riskerar eleverna att bygga egna logiska förklaringar för ett ämnesspecifikt innehåll som kanske inte alltid är helt korrekt (jfr Erlwanger, 1973)[2]. En relationell förståelse förklaras av Skemp som att en djupare matematisk förståelse grundläggs genom att relationer mellan olika begrepp blir synliga (Skemp, 1976). Schmittau (2003) menar att fokus i en algebraisk tradition är diskussioner och elevsamtal om relationer, strukturer och förhållanden inom matematiken. För att möjliggöra en relationell förståelse av exempelvis tal synliggörs relationer och strukturer inom talen genom att medierande redskap tas i bruk (Schmittau, 2003). Teoretiska samband inom och mellan tal kan enligt tidigare nämnda författare exempelvis synliggöras och diskusteras med elever via jämförelser av kvantiteter.

Van Oers (2001) skriver att när den algebraiska undervisningspraktiken bygger på Davydovs (2008/1986) beskrivning av en lärandeverksamhet (se kapitel 4) utgår undervisningen från Vygoskys idé om teoretiska respektive empiriska begrepp. Algebraiska symboler tas i bruk som medierande redskap

[2] I Erlwanger (1973) blir pojken Benny intervjuad om addition av tal i bråkform efter ett arbete enligt en strukturerad matematikundervisning. Benny hade utvecklat egna matematiska regler som inte alltid gav korrekt lösningar på beräkningar.

för att synliggöra teoretiska strukturer. Symbolerna tas i bruk istället för att strukturerna som i den aritmetiska traditionen, blir synliga via konkreta exempel med numeriska siffror. Att ta bruk av algebraiska symboler som medierande redskap i en algebraisk tradition handlar alltså inte om undervisning i algebra som matematiskt innehåll som beskrivits för en aritmetisk tradition. I den algebraiska traditionen används algebraiska symboler som medierande redskap för att stötta utvecklingen av ett teoretisk tänkande. Användandet av algebraiska symboler gäller även den inledande matematikundervisningen. Hur detta kan gå till beskrivs i det följande.

Inom den algebraiska traditionen har som tidigare nämnts, Elkonin och Davydov utvecklat ett matematikdidaktiskt program för de yngsta eleverna. I engelskspråkig litteratur benämns programmet “curriculum” (Davydov, 2008, s. 147) eller ”teacher manual” (Davydov, 2008, s.141). Elkonin och Davydov har utvecklat uppgifter som elever behöver lösa i en bestämd ordning för att appropriera ämnesspecifikt matematiskt kunnande (Davydov, 2008). I programmet används algebraiska symboler för att synliggöra ”the general basis of all the forms of real numbers” (Davydov, 2008, s. 147). Programmet utgår från att barn redan vid tidig ålder kan förstå en helhet som olika delar (Davydov & TSvetkovich, 1991). Barns möjligheter att förstå delar av en helhet bekräftas även i senare fenomenografisk forskning (j.fr. Björklund, 2007). Davydov argumenterar för att även mycket unga elever därför kan göras medvetna om hur delar relaterar till varandra och hur delar kan relatera till den helhet de är en del av. Denna medvetenhet kan, som tidigare nämnts, utvecklas via jämförelser av kvantiteter (Davydov, 2008; Schmittau, 2003). Jämförelserna gäller kvantiteter i relation till längder, areor, volymer och vikter. Ett additivt förhållande mellan olika längder synliggörs i programmet exempelvis enligt figur 1 där helheten A kan beskrivas med delarna B och X.



Figur 1: A = B + X

I figur 1 uttrycks det additiva förhållandet mellan de olika längderna som $A = B + X$ där B kan uttryckas som $B = A - X$ och X uttryckas som $X = A - B$.

I de första uppgifterna eleverna möter i Elkonins och Davydovs program skiljer de kvantiteter som ska jämföras så mycket att de går att jämföra visuellt även med ett visst avstånd från varandra (Schmittau, 2003). I ett nästa steg skiljer sig kvantiteterna väldigt lite så de föremål som representerar kvantiteterna behöver jämföras nära varandra, exempelvis längden av två olika pennor, eller arean av två olika bokpärmar. I ett tredje steg ska eleverna jämföra föremål som inte är flyttbara, exempelvis höjden av en dörr och höjden av en bokhylla eller arean av en dörr och arean av ett bord. De sistnämnda uppgifterna skapar ett behov av en mätenhet som medierande redskap för att genomföra jämförelsen. Höjden på dörren respektive bokhyllan kan jämföras med förslagsvis ett rep. Repet utgör då den enhet mätningen utförs med. Areorna av dörren respektive bordet kan jämföras med hjälp av en areamall som kan flyttas mellan föremålen. Än så länge har uppgifterna endast varit att jämföra för att se vilken som är längst, störst eller tyngst. I ett fjärde steg kan uppgiften vara att använda ett kort rep för att mäta något långt, eller en liten areamall för att mäta något som har större area. Det korta repet respektive den lilla areamallen måste eleverna urskilja som en enhet, samt att en enhet måste vara den samma för att olika föremål ska kunna jämföras. Volymen i olikformade flaskor kan exempelvis mätas med någon form av volymenhet för att volymen ska kunna jämföras. Längden, arean, volymen av det föremål som mäts anges sedan i relation till denna enhet. Ett exempel kan vara ett föremål som är B långt. Detta föremål mäts med en mätenhet som är U långt. Då består B av ett antal U. Sambandet mellan B och U kan anges med representationen $B = x \cdot U$, där x är antalet mätenheter U som behövs för att mäta B.

$$U \xrightarrow{x} B$$

Figur 2: $B = x \cdot U$

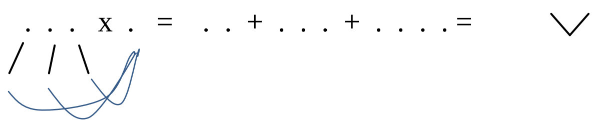
Antalet U är, för de yngsta eleverna, alltid ett heltal. De flesta jämförelser eleverna arbetar med kommer med tiden att resultera i mätresultat som måste anges med rationella tal. På det viset kan de naturliga och rationella talen introduceras utifrån samma tradition, vilket är en styrka för att visa hur de olika talområdena hänger samman (Davydov & TSvetkovich, 1991).

I arbetet med jämförelserna utvecklar eleverna inledningsvis en förståelse för symbolerna < > = och ≠ innan de börjar arbeta med numeriska siffror. Med stöd av dessa symboler kan taluppfattning utvecklas utifrån jämförelserna av olika kvantiteter (jfr Davydov, 2008). I en studie gjord av Adolfsson-Boman, Eriksson, Hverven, Jansson och Tambour (2013) introducerades arbetet med dessa tecken tillsammans med elever i årskurs 1. I studien utvecklades nyckeluppgifter där eleverna diskuterade dessa tecken. Utifrån tecknet mindre än, <, som eleverna fick lära känna via läraren, diskuterade de sig fram till de övriga tecknen. Uppgifterna löste eleverna genom jämförelser av olika cuisenairestavar genom att konstruera och representera likheter som $A = B + C$ (jämför figur 1).

I en algebraisk lärandeverksamhet är ett problem alltid ingången till en undervisning (Davydov, 2008; Zuckerman, 2004). Ett exempel hämtas ur Zuckermans ovan refererade text. Här beskriver hon en lektionssekvens från Skola 91 i Moskva [3] där läraren ritat en tallinje på tavlan enligt följande:

Figur 3: Bild på tallinje ur Zuckerman 2004

Läraren frågar eleverna hur resten av talen på tallinjen kan noteras. Eleverna svarar att det kan de inte veta eftersom de inte vet åt vilket håll talen ökar i värde. De vet inte heller vilken enhet som används. Eleverna kallar detta en ”trap”, vilket innebär en uppgift som inte går att lösa. En ”trap” är en pedagogisk finess som handlar om att utmana eleverna i deras förståelse (Zuckerman, 2004). Ett annat sätt att arbeta med ett problem finns dokumenterat på en videofilm från årskurs tre i samma skola. Eleverna och läraren utvecklade en modell för multiplikation av ett tresiffrigt tal och ett ensiffrigt tal med hjälp av ickenumeriska symboler, se nedan. Prickarna symboliserar generella siffror och det avslutande tecknet ∨ symboliserar en produkt. Linjerna mellan prickarna visar att varje enskild siffra i den ena faktorn ska multipliceras med det ensiffriga talet i den andra faktorn. Varje sådan multiplikation ger en term som sedan adderas för att ge produkten av multiplikationen.



Figur 4: Modell av multiplikation från en lektion i Skola 91

Utifrån den modellen gjorde läraren en multiplikationsberäkning enligt figuren nedan.

thous	hund	tenth	one
	3	6	7 8
		2 4 5	4 8 6
	1	2	8

Figur 5: Uppgift årskurs 3 Skola 91

[3] Skola 91 är den skola i vilken Elkonin och Davydov gjorde sina experiment på 1960-talet. Skolans personal arbetar ännu idag tillsammans med forskare från Psychological Institute, Russian Academy of Education, för att utveckla undervisning.

Läraren bad eleverna diskutera hur beräkningen är gjord. Beräkningen i algoritmen är inte korrekt och det såg eleverna omgående, eftersom eleverna är vana att alltid analysera huruvida en uppgift är möjlig att lösa eller korrekt löst. Eleverna skulle sedan utvärdera om den generella modellen de utvecklat fungerade för att ge en korrekt lösning på beräkningen.

Att lösa problem i en algebraisk matematikpraktik handlar alltså inte om att hitta olika lösningsstrategier på särskilda problemlösningsuppgifter såsom beskrivs i avsnittet om den aritmetiska undervisningstraditionen (jfr Polya, 1945). Att lösa problem i en algebraisk tradition är inte heller att hitta lösningar på vissa typer av problemlösningsuppgifter som Taflin (2007) benämner ”rika problem”, se även här avsnittet om den aritmetiska traditionen. I en algebraisk tradition bör undervisningen istället utgå från ett problem (Davydov, 2008). Lektionssekvenserna ovan utgör exempel på hur detta kan gå till. I en algebraisk tradition utvecklas matematiska modeller genom att arbeta teoretiskt med ett problem tillsammans med eleverna, genom att bland annat diskutera och reflektera över problemet som ska lösas och egna och kamraters lösningar på detta problem, se vidare kapitel 4.

2.3 Rationella tal – en ämnesdidaktisk innehållsanalys

Följande innehållsanalys presenterar rationella tal utifrån att dessa tal ska urskiljas som tal.

2.3.1 Kulturhistorisk bakgrund

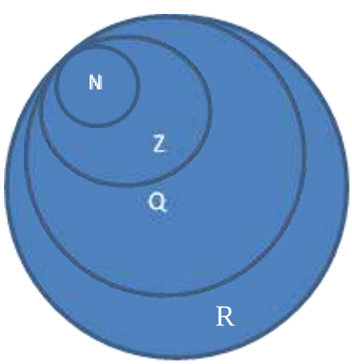
Innehållsanalysen börjar med hur rationella tal kan förstås utifrån de mänskliga behov som en gång orsakade talens utveckling (jfr Davydov, 2008; Leontiev, 1978). Matematiken och behovet av matematiska representationer har utvecklats ur många geografiska och historiska utvecklingsgrenar (Johansson, 2004). Många av dessa grenar är flera tusen år gamla. En geografisk gren kan spåras tillbaka till Babylonien, Indien, Persien och Kina. En annan geografisk gren kan ses komma från Egypten och Grekland. Gemensamt för dessa mycket tidiga utvecklingsgrenar är talens praktiska betydelse som redskap för att göra exakta mätningar och jämförelser av mätningar. I Egypten, Grekland och Babylonien finns även mycket tidiga traditioner där matematik och olika talområden utvecklades för att göra problemlösning enklare och för att underlätta tänkandet. Talen utvecklades dels som ett redskap för att underlätta i praktiska situationer, dels som ett intresseområde för teoretisk utveckling (Olsson, 1999). Från allra första början användes enbart heltal vars symboler definierade ett verkligt antal eller en verklig kvantitet av något, exempelvis avstånd, volym eller vikt. Behovet av mer exakta mätetal uppstod någon gång under antiken i och med att ingenjörskonsten utvecklade metoder för mätningar med bestämda enheter. Beroende av vad som skulle mätas och vilken mätenhet som valdes uppstod behov av att ange mätresultat med andra tal än bara hela tal, vilket innebar att de rationella talen utvecklades (a.a.).

Under en mer nutida epok, under 1960- och 70-talen, förändrades användningen och sättet att representera rationella tal. Under den här tidsepoken implementerades SI-systemet för olika måttangivelser i Sverige. Meter, kilogram och multiplar av dessa enheter ersatte de måttenheter man tidigare använt. De tidigare enheterna byggde på tal i bråkform såsom exempelvis 1/2 tum, ett längdmått, eller 1/4 tjog som angav ett antal. När dessa enheter byttes mot standardiserade SI-mått blev även mätetalen som användes för att ange värdet av olika storheter utbytta från tal i bråkform till multiplar av tiobasdecimaler. Decimaltalen fick en större användning i det vardagliga livet, men inom matematiken finns bråkformen kvar i samma omfattning och med samma innehållsliga betydelse (se exempelvis McIntosh, 2008; Löwing, 2010).

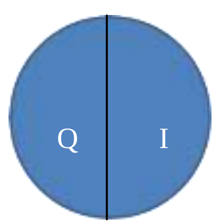
2.3.2 Talområden

Innehållsanalysen fortsätter med en presentation av vad rationella tal.

Alla tal kan organiseras i olika talområden vilka förhåller sig till varandra enligt figur 6. För att tyda figuren får man tänka sig att ett talområde inkluderar alla tal i de talområden som ligger innanför. De rationella talen utgörs av talområdet markerat med Q i figur 6 och 7.



Figur 6: Olika talområden



Figur 7: Reella tal

Tabell 1: Exempel på tal i olika talområden.

Talområde	Talmängd
NATURLIGA TAL (N):	0, 1, 2, 3, 4, 5….
HELA TAL (Z):	…-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5,…
RATIONELLA TAL (Q):	-4……….-3……..-2……….-1………0… ….1………2………3……….4…….5
IRRATIONELLA TAL(I):	√2, √3, e
REELLA TAL (R):	Inbegriper alla tal som finns på tallinjen

Davydov & TSvetkovich (1991) menar att det är viktigt att diskutera om alla ovan nämnda talområden redan med unga elever.

> At different stages of teaching with various degrees of boldness one and the same tendency invariably appears: to have done with the introduction of the numbers as soon as possible and already go on to discussing numbers and the relationships between them. (Davydov & TSvetkovich, 1991, s. 23-24.).

De naturliga talen (N) i det innersta talområdet inbegriper de positiva hela talen. Här återfinns även talet noll. I nästa talområde (Z) finns förutom de naturliga talen även de negativa hela talen. Då talområdet utökas ytterligare, inkluderas även de rationella talen (Q). Ett annat sätt att visa hur talen relaterar till varandra är med hjälp av en tallinje (McIntosh, 2008). När vi pratar om att talområdet utökas, är det viktigt att eleverna förstår att fler tal blir inräknade som i figur 6, inte att det endast är tallinjen som görs längre, för att fler tal ska inrymmas (jfr McIntosh, 2008).

För att skilja rationella tal från tal som inte är rationella kan det vara intressant att här även beskriva de så kallade irrationella talen. Tal som inte kan skrivas som tal i bråkform med hela tal i täljare och nämnare är inte rationella utan irrationella (I). Exempel på sådana tal är $\sqrt{2}$, e, samt π. De rationella talen utgör tillsammans med de irrationella talen talområdet för reella tal så som visas i figur 7 ovan. De reella talen utgör samtliga tal som kan markeras på en tallinje. Mängden av de komplexa talen som brukar förklaras som ett talområde utanför mängden av de reella talen ligger utanför denna studies intresseområde och presenteras därför inte i detta arbete.

2.3.3 Multiplikativa och additiva förhållanden i rationella tal

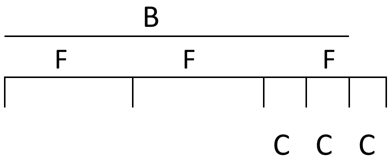
Innehållsanalysen utgörs även av de strukturella förhållanden som finns i de rationella talen. Rationella tal definieras som alla tal som kan skrivas på formen *m/n,* där *m* och *n* representerar hela tal och *n* inte är noll[4] ($n \neq 0$) (Kieselman & Mowitz, 2008). Ett rationellt tal behöver av den anledningen förstås som ett förhållande mellan två hela tal, men det måste också med nödvändighet förstås som ett tal i sig självt. Ett rationellt tal beskrivs alltså av divisionen *m/n,* vilket innebär att talen representerar ett multiplikativt förhållande mellan talet *m* och talet *n*. Ett rationellt tal beskriver värdet av *m* delar av totalt *n* delar. Därför är det enligt Davydov (2008) viktigt att tidigt, redan i den inledande matematikundervisningen, diskutera och visa på multiplikativa förhållanden för att utveckla en förståelse av tal, speciellt för att utveckla en förståelse av de rationella talen. Vergnaud (1988) förklarar matematiskt kunnande med ”conceptual fields” som han förklarar ”A conceptual field is defined as a set of situations, the mastering of which requires mastery of several concepts of different natures.” (Vergnaud, 1988, s. 141.). Rationella tal hör enligt Vergnaud till ” the conceptual fields of multiplication”, det vill säga till ett fält av multiplikativa strukturer. I de multiplikativa strukturerna ingår även kunnande om linjära funktioner, vektorräkning, proportionalitet, förhållande, samt operationer med multiplikation och division. Vergnaud menar också att kunnande inom ett conceptual field stöder kunnande av alla delarna i fältet. Hela fältet av multiplikativa strukturer hjälper alltså till att stötta kunnandet av de multiplikativa förhållandena i ett rationellt tal.

2.3.4 Generell modell för rationella tal

I Davydov och TSvetkovich (1991) utvecklades en modell för rationella tal som gjorde det möjligt att diskutera de multiplikativa och additiva förhållandena som finns i dessa tal. Författarna utgick från att en sträcka *B* ska uttryckas med *F,* där *B* inte kan anges med ett helt antal *F.* En generell modell diskuterades tillsammans med eleverna där $B = x \cdot F + rem.$ I diskussionen uppstod ett behov av att även beskriva *rem* i modellen. Det uppstod ett behov av att bestämma hur stor del av *F* som behövde läggas till de hela *F* för att ange *B. F* delades upp i mindre delar, vilka benämndes med *C,* se figur 8. Den modell Davydov m.fl. utvecklade anger *B* uttryckt med *F* enligt $B = x \cdot F + (mC/nC)\,F$, där *mC/nC* anger hur stor del av *F* som behövs för att ange *B.* I modellen som utvecklades synliggjordes de två multiplikativa förhållandena som finns, dels inom bråkdelen av talet genom *m/n,* dels mellan mätenheten *F* och objektet som ska mätas *B* genom $x{\cdot}F$. Det

[4] En förklaring till att $n \neq 0$ är att man ser division som inverterad multiplikation. Det vill säga att om $a/b = c$ så är $a = bc$. Med $b = 0$ kan man skriva om ekvationen som $a/0 = c$ vilket innebär att $a = 0c$. 0 gånger vilket tal som helst är alltid 0, vilket innebär att a alltid lika med 0. Det i sin tur innebär att alla värden på $a \neq 0$ då blir omöjliga. Om $a = 0$ så uppkommer ytterligare ett problem, $0/0 = c$ vilket leder till att $0 = 0c$ vilket är sant för alla möjliga värden på c. Därför är division med 0 odefinierbart.

additiva förhållandet blir synligt i additionen av de två termerna som utgörs av heltalsdelen respektive bråkdelen.



Figur 8: En schematisk bild av B = x · F + (mC/nC) F, där x är antalet hela F och m är de C som behövs för att mäta B och n är totala antalet C som F delas i.

2.3.5 Olika representationsformer

I innehållsanalysen ingår även att rationella tal kan presenteras med olika representationsformer. De kan representeras som tal i bråkform, decimalform eller procentform (Kiselman & Mouwitz, 2008). Ett tal i bråkform kan skrivas i decimalform genom att man utför den division som talet representerar, exempelvis 2/10 = 0,2. Tillåts en oändlig decimalutveckling i en sådan division kan samtliga tal i bråkform skrivas som tal i decimalform, exempelvis 1/3 = 0,3333…, där tre punkter betyder oändligt antal decimaler. Om däremot endast ett begränsat antal decimaler tillåts kan enbart bråk med nämnare som kan faktoriseras med 2 eller 5 skrivas som tal i decimalform. 1/3 kan exempelvis endast anges som ett närmevärde om det ska anges med begränsat antal decimaler, 1/3 ≈ 0,33333. För alla rationella tal, förutom de som har en nämnare som bara innehåller faktorerna 2 eller 5 (inga andra heltal), gäller att talet uttryckt i bråkform ger ett exakt värde medan talet uttryckt i decimalform endast utgör ett närmevärde. Eftersom rationella tal är alla tal som kan skrivas som en kvot mellan hela tal, är även de hela talen rationella, exempelvis 20/5 = 4/1 = 4 och -15/3 = -5.

Ett tal i bråkform kan representeras i blandad form då talet representerar ett värde mellan två hela tal. Ett tal i blandad bråkform är uppdelat i en heltalsdel och en bråkdel där heltalsdelen skrivs ihop med bråkdelen utan något tecken emellan. Exempelvis kan bråket 20/3 skrivas som 6 2/3. Vanligtvis betyder ett utelämnat tecken på det viset ett utlämnat multiplikationstecken. I 6 2/3 är det istället underförstått att 6 2/3 = 6 + 2/3, det vill säga 6 2/3 ≠ 6•2/3. I Elkonins och Davydovs program är det nödvändigt att inleda arbetet med rationella tal med tal i blandad bråkform eftersom programmet utgår från jämförelser av kvantiteter. Resultaten av olika jämförelser kan ge mätresultat mellan alla heltal. Forskarna har därför utvecklat en generell modell för rationella tal där det additiva förhållandet synliggörs, se avsnitt 2.3.4 här ovan. I andra undervisningstraditioner är det vanligast att inleda arbetet med tal mellan heltalen 0 och 1.

2.3.6 Rationella tal som empiriskt begrepp

Innehållsanalysen avslutas med en diskussion om elevers erfarenheter av rationella tal som kan härröra ur vardagliga företeelser. Ett exempel kan då vara att många elever lärt sig ramsräkna med de naturliga talen, (N) i figur 6 ovan, och även lär sig enklare operationer med dessa tal. När eleverna sedan ska lära de rationella talen (Q) kan dessa tal inte ramsräknas, utan måste läras på något annat sätt (jfr Löwing, 2010). Davydov (2008) menar att erfarenheter ur det vardagliga livet är empiriska erfarenheter som kan utveckla empiriska begrepp. Matematik, som är en teoretisk vetenskap som syftar till att utveckla teoretiska begrepp kan, enligt Davydov använda exempel ur en empirisk vardag, men en teoretisk vetenskap kan aldrig bygga på eller utgå från empiriska erfarenheter. Teoretiska respektive empiriska begrep diskuteras vidare i uppsatsens kapitel 4. Det matematiska kunskapsinnehållet i vardagliga empiriska erfarenheter kan till och med skilja från ett teoretiskt kunskapsinnehåll. Att dela en apelsin på hälften mellan två personer kan i vardagen innebära att en person får fem klyftor och den andra får sex, och i det vardagliga sammanhanget gäller att apelsinen är delad i två halvor. Dessa halvor måste dock ses som halvor som empiriska exempel, vilket inte är det samma som halvor i en teoretisk matematisk kontext (jfr Davydov, 2008). Det teoretiska begreppet halv, är 1 del av 2 exakt lika stora delar, med ett värde som representeras med exempelvis 1/2 eller 0,5. Ovanstående exemplifierar problem som kan uppstå om elever ska bygga en teoretisk matematisk förståelse av talet ”en halv” enbart utifrån empiriska erfarenheter (jfr Sophian, Garyantes & Chang, 1997).

2.4 Matematikdidaktisk forskning om rationella tal

I detta avsnitt redovisas tidigare studier om rationella tal med relevans för lärararbetslagets arbete att designa kartläggningsarbetet och designen av lektionerna i learning studyarbetet utifrån kartläggningen. Redovisningen är strukturerad utifrån den tidigare beskrivna uppdelningen, aritmetisk respektive algebraisk undervisningstradition.

En första scanning av tidigare forskning är genomförd genom sökningar i databaser via Stockholms universitets bibliotekskatalog liksom sökningar via sökmotorerna http://www.libris.kb.se och http://www.googlescholar.com. Sökord som användes var bland andra algebraic, number sense, algebraic mathematics number sense, rational numbers, rational numbers and algebra, understanding of numbers. Tidigare studier genomförda i den aritmetiska traditionen är omfattande. Med samtliga ovan nämnda sökord i googleschoolar återfås exempelvis cirka 144 000 träffar på 0,53 sekunder. Fördjupade sökningar begränsades därför till att gälla elever i åldersspannet

6 till 12 år, och till sökord som anknöt till svårigheter vi analyserat i vårt kartläggningsarbete. Sökorden i de fördjupade sökningarna var bland andra primary school, number sense, rational number, part whole and decimal numbers. Tidigare studier genomförda i den algebraiska traditionen har förutom sökningar i tidigare nämnda databaser även utgått från referenslistor i litteratur som behandlar texter om Vygotskys kulturhistoriska skola.

2.4.1 Tidigare forskning om rationella tal i aritmetisk tradition

I detta avsnitt redovisas forskning om rationella tal i en aritmetisk tradition, där det finns beskrivet hur taluppfattning kan utvecklas via numeriska siffror. Någon enhetlig beskrivning av vilket kunnande som denna taluppfattning består i tycks inte finnas. Många studier beskriver vad som kan ses som viktiga aspekter av taluppfattning i detta talområde, samt vad elever visat ha svårigheter med att förstå. Många studier utgår från ett konstruktivistiskt sätt att se på lärande, där elever ska konstruera en förståelse av talen.

Taluppfattning har beskrivits som en samverkan mellan elevers förmåga att uppfatta tal och att använda tal i operationer (Andrew & Sayer, 2012; Berch, 2005; Howden, 1989; Reys, 1991). Dessa forskare menar att det inte är möjligt att i detalj ange vad man kan när man har en god taluppfattning, men genom studier kan de tillföra olika aspekter av vad en taluppfattning troligen skulle kunna innebära. Andrew och Sayer (2012) jämför hur lärare i olika länder arbetar med taluppfattning. De menar att lärare i olika länder i stort sett fokuserar samma aspekter av en taluppfattning, och att de aspekter som fokuseras känns igen ur tidigare forskningsresultat. Aspekter av taluppfattning ur tidigare studier presenteras bland annat av Berch (2005) som kunnande om positionssystemet, kunnande om olika sätt att aritmetiskt skriva olika tal, operera med olika tal i relation till olika räknesätt, samt förmåga till överslagsräkning. Ett annat sätt att se taluppfattning beskriver Howden (1989) och Reys (1991). För dem innebär taluppfattning att eleven ger mening åt situationer genom att konkretisera med tal i olika storlekar, att relatera tal till sammanhang, samt undersöka vad som händer när man manipulerar tal.

Positionssystemet utgör en viktig aspekt för att utveckla kunnande om rationella tal. Även om elever idag vanligtvis möter rationella tal genom tal i decimalform betyder det inte att denna representationsform matematiskt är lättast att hantera (Hiebert & Wearne, 1986). Svårigheter med tal i decimalform som Hiebert och Wearne beskriver är att elever lätt generaliserar aspekter av de hela talen till tal i decimalform. Elever tror exempelvis att en nolla extra till höger i ett decimaltal gör talet tio gånger större, medan en nolla till vänster om en decimal inte påverkar värdet av talet. Författarna ser av den anledningen en fördel med att använda bråkform och decimalform tillsammans för att exempelvis visa att 3,05 = 305/100 och 3,50 = 350/100. Förståelsen av tal i decimalform bygger på en förståelse av positionerna vilkas värde till höger om decimalkommat kan representeras av decimalbråken det vill säga 1/10, 1/100, 1/1000 och så vidare. Sackur-Grisvard och Léonard (1985) menar att inleda undervisning om rationella tal med decimaltal, eller att i undervisning bara relatera tal i decimalform till vardagliga situationer fungerar i vissa fall men på sikt riskeras en djupare förståelse av rationella tal att gå förlorad. Dessutom kan, som även beskrivits i avsnittet om rationella tal, inte alla rationella tal skrivas som tal i decimalform, men alla decimaltal kan skrivas som tal i bråkform med hjälp av de så kallade decimalbråken (a.a.).

Att operera med rationella tal kan bland annat innebära att storleksordna talen. Sackur-Grisvard & Léonard (1985) visar att när elever ska lära sig operera med decimaltal tänker de på decimalerna på samma sätt som de hela talen. Exempelvis tänker elever ofta att 12,17 är större än 12,4 eftersom 17 är större än 4. Elever tänker även att både 12,24 och 12,34 är större än 12,7 eftersom de två förstnämnda talen har fler siffror. Vidare ser många elever 12,5 och 12,50 som tal med olika värden eftersom talen har olika antal siffror.

En svårighet med rationella tal som relaterar till tal i bråkform beskriver Steffe och Olive (2010) som det inversa förhållandet mellan värdet på ett tal i bråkform och värdet på nämnaren i det samma. Elever har ofta svårigheter att se exempelvis värdet 1/3 som mindre än 1/2 eftersom 3 är större än 2. Steffe och Olive menar att elever måste se att rationella tal är tal, men att elever också måste se att dessa tal representeras som ett förhållande mellan två hela tal. Det förhållandet är eleverna mer vana att se som en operation och det kan vara svårt att förstå representationen av ett tal (a.a.).

Att se oändligheten av tal mellan två rationella tal menar Hart (1981) att är avgörande för att förstå rationella tal. Vosniadou, Vamvakoussi, och Skopeliti (2008) har sin teoretiska utgångspunkt inom conceptual change vilken är utvecklad i relation till Piagets teorier om lärande. Dessa forskare diskuterar vilken betydelse undervisningen har för den förståelse som eleverna konstruerar. Elever som konstruerar sin förståelse av de hela talen genom räknande, lär sig att det mellan två hela tal finns ett begränsat antal andra hela tal. Denna egenskap övergeneraliseras ofta till rationella tal. Ball (1993) menar att det unga elever säger om antalet tal mellan två hela tal är korrekt i förhållande till talområdet för heltalen, men att eleverna inte är observanta på att det inte längre är sant när talområdet utvidgas till de rationella talen. Ett förslag på hur denna övergeneralisering kan åtgärdas är tallinjen som kan förenkla för elever att förstå ”tätheten” av de rationella talen, det vill säga att mellan två godtyckliga rationella tal finns oändligt många andra rationella tal (Steffe & Olive, 2010).

De många olika tolkningarna, representationerna och symboliska konventionerna, som finns för rationella tal kan utgöra en av svårigheterna med att förstå talen (Kilpatrick, Swafford & Bradford, 2001; Lamon, 2005). Olika representationer kan exempelvis utgöras av 5/4, 1 1/4, 1,25 och 125 %. Dessa författare framhåller att det är lätt att förbise att bråk representerar tal. Steffe och Olive (2010), Olive (2011) samt Kilhamn (2011) menar att tallinjen i det sammanhanget är tydlig för att åskådliggöra hur olika representationer av naturliga tal och rationella tal är relaterade. Tallinjen kan exempelvis illustrera varför 5/3 är detsamma som 1 2/3 och att 6/3 har samma värde som talet 2.

Att kunna se tal i bråkform både som del av en helhet och som del av ett antal, och att i båda fallen även se bråkformen som dels en operation och dels som en kvantitet, skriver Kieren (1988) fram som ett av de stora problemen med tal i bråkform. Fenomenet med del av en helhet utnyttjas i en algebraisk undervisningstradition, se avsnitt 2.4.2.

Det matematiska språk som finns för benämning av rationella tal kan också ge upphov till svårigheter för elever (Steffe och Olive, 2010). Steffe och Oliver har med utgångpunkt i Piagets tankar om lärande sammanställt scheman för elevers kognitiva förståelse av rationella tal[5]. Dessa scheman är sammanställda utifrån vad elever sagt och hur de redovisat olika lösningar av uppgifter där rationella tal ingår. Exempel på en språklig svårighet som dessa forskare identifierat är benämningen en femtedel av tio (1/5·10). En femtedel kan tolkas som att 10 objekt är delade i två femhögar, det vill säga i två högar med fem i varje hög, och en av dessa femhögar utgör en femtedel. Löwing och Kilborn (2010) har sammanställt hur olika muntliga benämningar av matematiska representationer kan översättas ordagrant mellan olika språk. Enligt denna sammanställning benämns exempelvis tal i bråkform annorlunda på olika språk. När vi på svenska säger ”en tredjedel” om 1/3 blir direktöversättningar från somaliska ”av tre delar en del”, från turkiska ”tredjedel ett” och från kurmanji ”ungefär en tredjedel täljare ett”[6].

Jämförelser av kvantiteter för att utveckla en förståelse av rationella tal beskrivs av Niemi (1996). Även Niemi använder Piagets utgångspunkter som teoretiskt ramverk. Niemi har sammanställt en punktlista med sju egenskaper av rationella tal elever behöver konstruera en förståelse för, för

[5] De olika scheman som Steffe och Olive presenterar beskrivs under två huvudrubriker: Partitioning and Fraction Schemes.
[6] Exemplen är valda utifrån att det i föreliggande studie finns elever med somaliska, turkiska och kurmanji som modersmål.

att utveckla ett kunnande om rationella tal. Listan är tänkt som ett stöd för att bedöma elevers kunnande gällande rationella tal. I listan finns en egenskap beskriven där Niemi refererar till Davydov och TSvetkovich (1991):

> Any two quantities of the same type may be compared by measurement. One quantity may be identified as a referent quantity and the other expressed as a fraction of the first. Davydov and Tsvetkovich (1991) have argued that fraction understanding implies the ability to establish the units necessary to carry out this operation (Niemi, 1996, s. 353).

Niemi menar alltså att det även utifrån ett aritmetiskt perspektiv är viktigt att se tal som jämförelser av kvantiteter.

Rationella tal, iscensatta som ett lärandeobjekt i en learning study, kan med ett variationsteoretiskt ramverk beskrivas som en mängd olika innehållsliga aspekter som en specifik elevgrupp behöver urskilja av talen. Inom learning study traditionen och inom variationsteorin kallas aspekter av lärandeobjektet som elevgruppen behöver urskilja för kritiska aspekter. I tidigare forskningsprojekt med learning study som modell där rationella tal utgjort det direkta lärandeobjektet har Kullberg (2010) identifierat fyra kritiska aspekter för de elevgrupper som deltog i studien, nämligen:

- att rationella utgör punkter på en tallinje
- att rationella tal kan beskrivas med olika representationsformer
- att det mellan två tal finns ett oändligt antal rationella tal
- rationella tal som del av helhet

Vad gäller rationella tal tycks det inte, med de sökord som tidigare presenterats, finnas någon learning study som genomförts inom någon annan undervisningstradition än den aritmetiska.

2.4.2 Tidigare forskning rationella tal i en algebraisk tradition

I detta avsnitt redovisas forskning om rationella tal inom en algebraisk undervisningstradition. De studier som presenteras beskriver egenskaper hos rationella tal som måste synliggöras för att även väldigt unga elever ska kunna arbeta med och utveckla en förståelse för dessa tal.

Davydov och TSvetkovich (1991) studerade hur det skulle vara möjligt för unga elever (7-8 år) att utveckla teoretiskt kunnande om rationella tal. I studien utvecklade eleverna kunnande av både hela tal och rationella tal genom jämförelser av kvantiteter. I studien fick eleverna pröva att representera jämförelserna i skrift och på en tallinje samt beskriva hur rationella tal kunde infogas bland de hela talen. Den skriftliga representationen av jämförelserna genomfördes med stöd av både algebraiska och numeriska symboler. I studien utvecklades en modell för tal i bråkform där olika multiplikativa och additiva förhållanden synliggjordes (se avsnittet om ”Generell modell för rationella tal”). Ett resultat från den studien var att eleverna hade möjlighet att hantera lösningar på uppgifter som bestod av rationella tal, alltså inte enbart hela tal. Enligt forskarna kunde detta bero på att uppgifter där olika sträckor jämfördes och generella modeller som matematiska redskap var kända av eleverna sedan tidigare. Ytterligare ett resultat av studien var att eleverna var tvungna att se mätenheten i jämförelserna som en enhet. Att se mätenheten som enhet innebar bland annat att eleverna utvecklade förståelse för enheten som avståndet mellan 0 och 1 på en tallinje.

Morris och Schmittau har utifrån de goda elevresultaten i Davydov och TSvetkovich (1991) väckt frågan om elever som introducerats i matematiskt tänkande i en aritmetisk matematiktradition kunde vara hjälpta av liknande uppgifter. En sådan studie har genomförts i USA, där Morris (2000) redovisat arbetet med eleverna.

I Morris (2000) studie var syftet att undersöka om svårigheter som brukar uppstå när rationella tal introduceras i en aritmetisk tradition, kunde undvikas om eleverna istället möter rationella tal i en algebraisk undervisningstradition. I Morris studie deltog sex elever parvis i sju olika forskningslektioner. Eleverna hade inte arbetat med algebraiska symboler tidigare. Resultatet av studien sammanfattar Morris med att det här arbetssättet gav eleverna möjlighet att arbeta med tal i bråkform som dels en egen kvantitet och dels som en del av en helhet ”[…]interpret a fractional quantity as a single quantity and a divisible whole” (Morris, 2000, s.75). I lektionerna kunde eleverna se *a/b* som *a* stycken *1/b* vilket innebar att eleverna kunde beskriva det multiplikativa förhållandet mellan talen i täljaren respektive nämnaren i bråkformen. Davydov och TSvetkovich (1991) menar att detta är en egenskap för tal i bråkform som ofta förbises i en aritmetiskt grundad undervisning. Att se det multiplikativa förhållandet medförde att eleverna lättare än i en aritmetisk tradition kunde förstå likheter mellan olika tal i bråkform (exempelvis 1/2 = 3/6) och att de lättare kunde göra beräkningar med tal i bråkform (exempelvis addition av tal i bråkform). Vidare kunde eleverna i Morris studie översätta tal i bråkform till en längd på en tallinje. De rationella talen uppstod som resultat av jämförelser av längder, och det resultatet hade eleverna inga problem med att markera på en tallinje. I den studie Davydov och TSvetkovich genomförde, formulerade eleverna en slutsats om att storleken på ett mätresultat är omvänt beroende av storleken på mätenheten. Samma slutsats formulerade eleverna i Morris studie som att om vi mäter ett objekt med en stor enhet blir mätresultatet litet och om vi mäter med en liten enhet blir mätresultatet stort. Morris förklarar den mer generella slutsatsen som eleverna i Davydov och TSvetkovich studie formulerade med att dessa elever tidigt och kontinuerligt arbetat med grundläggande additiva och multiplikativa relationer, inom ett tal. I Morris studie diskuterades det omvända förhållandet mellan nämnaren och värdet på bråket utifrån generella algebraiska uttryck som: Om *A/b* =5 och *A/c* = 15 vilken är då relationen mellan *b* och *c*? Om *H/k*=3 och *J/k*=4, vilken är då störst, *H* eller *J*? De goda elevresultaten som uppvisades i dessa studier förklaras med att kvantiteter är en av matematikens mest grundläggande egenskaper, en ”germ cell” (Davydov, 2008; Schmittau, 2004).

Sophian, Garyantes och Chang (1997) har studerat hur en undervisning kan designas för att elever som är mellan fem och sju år ska förstå det inversa förhållandet mellan antalet delar ett tal i bråkform delas i och värdet på det bråktal som representeras. Detta förhållande är svårt att förklara i en aritmetisk praktik. Sophian och hennes kollegor visar att elever som arbetar med icke numeriska symboler som stöd för att lösa uppgifter där olika kvantiteter ska jämförs, lättare kan förklara detta inversa förhållande, än elever som använder traditionella siffersymboler. I studien delas en bestämd yta upp i olika ”enheter”. Barnen ser att ett större antal ”enheter” medför att varje ”enhet” blir mindre om det som delas är lika. En annan egenskap för rationella tal som kan vara svår att förklara i en aritmetisk tradition men som eleverna i Sophians studie hade lättare att förklara är hur många rationella tal det finns mellan två olika tal. En bestämd yta kan delas i väldigt många delar, teoretiskt hur många delar som helst. Storleken på delarna, det vill säga enheterna som ytan delas i, kan vara hur små som helst. Detta medför att de rationella talen mellan två andra tal kan vara hur många som helst.

Schmittau (2004) samt Schmittau och Morris (2004) analyserade hur arbetet med Davydovs program fungerat i matematikundervisning i USA. Inledningsvis upplevde lärarna att det var svårt att arbetet med uppgifterna i programmet. Det didaktiska materialet, med bland annat lösningsförslag till olika uppgifter, som lärare i USA är vana vid fanns inte att tillgå i detta program (Schmittau & Morris, 2004). Istället bestod programmet av problemuppgifter ordnade i en mycket specifik ordning. Den handledning som finns för lärarna skriver fram att problemen i uppgifterna inte ska brytas ner i smådelar. I programmet poängteras vidare att lärarna inte ska värdera elevernas svar, utan eleverna ska lära sig argumentera för sin lösning och försöka förstå hur klasskamraterna tänkt då de löst en uppgift. I jämförelse mellan traditionellt undervisningsmaterial i USA och Elkonins och Davydovs program är det alltså skillnader både i innehållet i uppgifterna och det sätt som uppgifterna presenteras på. Eleverna tyckte periodvis att det var svåra uppgifter men upplevde oftast arbetet med problemlösning stimulerande. De algebraiska uppgifter eleverna i årskurs 4 arbetade med i Morris studie, arbetar elever i USA normalt med i klasser motsvarande högstadiet i Sverige (Schmittau, 2004). Samtidigt är forskarna mycket tydliga med att Elkonins och Davydovs program ger elever även i USA bättre möjligheter att vara deltagare i undervisning om rationella tal och ger elever större möjligheter att förstå rationella tal som tal (Schmittau & Morris, 2004).

3. PROBLEMFORMULERING

Rationella tal används, som tidigare nämnts, flitigt av både barn och vuxna i många vardagliga situationer. Rationella tal har även ett bärande matematiskt innehåll som det är viktigt att få en fördjupad förståelse av. Trots de rationella talens betydelse både i ett vardagligt matematiskt och i ett teoretiskt matematiskt sammanhang är det många elever som långt upp i skolåren har svårigheter med förståelsen av dessa tal.

Det kan, som delvis framgått i det föregående, finnas många orsaker till varför det kan vara svårt att utveckla en djupare förståelse av rationella tal. Teoretiska begrepp, dit begrepp inom matematiken hör, bör enligt Vygotsky (1934) utvecklas från det abstrakta till det konkreta. Detta får till följd att en djup förståelse för matematik inte kan utvecklas enbart utifrån empiriska exempel. Davydov (2008) och Schmittau (2004) menar att det är vanskligt att försöka utveckla elevers matematiska kunnande utifrån det Vygotsky kallar empiriska begrepp, det vill säga att bygga ett matematiskt kunnande enbart på erfarenheter från en vardaglig kontext. Risken med att teoretiska begrepp utvecklas ur empiriska observationer är att elevers kunnande stannar vid en mängd olika konkreta exempel istället för en teoretisk förståelse. Egenskaper hos rationella tal som att strukturen för dessa tal innehåller både multiplikativa och additiva förhållanden kan exempelvis vara svåra att urskilja i empiriska exempel. Eleverna behöver urskilja denna struktur för de rationella talen, där Davydov och TSvetkovich (1991) skriver fram nödvändigheten att ta stöd av medierande redskap. Davydov (2008) gör i det här sammanhanget vissa paralleller mellan en aritmetisk undervisningstradition och utveckling av empiriska begrepp. Schmittau (2005) gör paralleller med en aritmetisk tradition och Skemps (1976) beskrivning av instrumentell förståelse. Schmittau menar att om undervisningen i allt för stor utsträckning utgår från empiriska exempel, kan det innebära en risk för att eleverna utvecklar en instrumentell mekanisk förståelse som bygger på regler och exempel istället för en djupare relationell förståelse. Davydov (2008) och van Oers (2001) ser därför undervisningstraditionen som avgörande för vilket kunnande som möjliggörs.

Som framgått av avsnitt 2.4.1 finns en stor mängd forskningsrön gällande rationella tal iscensatta i en aritmetisk undervisningstradition. Forskning som däremot belyser hur rationella tal kan gestaltas i den algebraiska traditionen, finns inte i samma utsträckning (se avsnitt 2.4.2). Här kan det till och med skönjas en lucka inom det matematikdidaktiska forskningsfältet. I forskarsammanhang har vikten av studier där undervisningspraktiken utvecklas till en algebraisk praktik diskuterats (se Davydov, 1988). I de få studier som ändå gjorts av rationella tal gestaltade i en algebraisk undervisningstradition har det visat sig effektivt att elever från första början möter uppgifter i sådan praktik (Davydov & TSvetkovich, 1991). Det har även visat sig framgångsrikt att elever som börjat utveckla taluppfattning i en aritmetisk tradition möter de rationella talen i en algebraisk undervisningstradition (Morris, 2000; Morris & Schmittau, 2004).

Utifrån genomgången av tidigare forskning där undervisning grundad i lärandeverksamhet som lärandeteoretiskt ramverk ser ut att ge goda elevresultat och lärararbetslagets erfarenheter om svårigheter att undervisa om rationella tal ställs nu frågan *vad* i en algebraisk lärandeverksamhet som möjliggör att elever utvecklar kunnande av lärandeobjektet att urskilja rationella tal som tal.

3.1 Syfte och forskningsfrågor

Syftet med föreliggande studie är att utforska vad i en algebraisk lärandeverksamhet som möjliggör att elever urskiljer rationella tal som tal. Den undervisning som utvecklas iterativt grundar sig i en didaktisk gren av verksamhetsteori, lärandeverksamhet. Lärandeverksamheten utgör grunden för både undervisningstraditionen och det ämnesdidaktiskt grundade matematikinnehållet i studien.

Utifrån syftet formuleras följande tre frågeställningar:

- Vad framstår som möjligheter respektive hinder för att urskilja rationella tal som tal om undervisningen förändras i riktning mot en algebraisk lärandeverksamhet?
- Vilket kunnande av rationella tal möjliggörs i relation till olika redskapsmedierande handlingar i den algebraiska lärandeverksamheten?
- Vad utgör villkor för mediering av rationella tal som tal i en algebraisk lärandeverksamhet?

4. TEORETISKT RAMVERK

> In learning activity […], both the goal and the result are not an external product, but change within oneself as the agent of the activity.
> (Repkin, 2003. s. 15.)

I detta kapitel beskrivs det teoretiska ramverk, lärandeverksamhet, som används både för design och analys av lektionerna i learning study-arbetet samt för den fördjupade analys som görs för att besvara uppsatsens forskningsfrågor.

4.1 Val av teoretiskt ramverk

Mot bakgrund av uppsatsens syfte och forskningsfrågor är ett teoretiskt ramverk som fokuserar en algebraisk lärandeverksamhet av intresse. Arbetet grundar sig i att kunnande i matematik utvecklas genom redskapsmedierande handlingar i en lärandeverksamhet, där matematik utgör en teoretisk vetenskap, enligt Vygotskys definition av empiriska och teoretiska begrepp.

4.2 Verksamhetsteori

I det här avsnittet beskrivs mycket kortfattat och övergripenade den gren av verksamhetsteori som utgör grunden för det teoretiska ramverket lärandeverksamhet.

Verksamhetsteori är utvecklad i relation till Vygotskys kulturhistoriska skola, där den verksamhetsteoretiska traditionen förutom ett sociokulturellt fokus även ser kulturhistoriska aspekter som centrala för mänskliga handlingar. De kulturhistoriska aspekterna gäller såväl det innehåll som fokuseras som den verksamhet där innehållet gestaltas (Leontiev, 1978). Vygotsky och Leontiev, vilka ses som förgrundsfigurer inom den verksamhetsteoretiska traditionen, menar att allt mänskligt handlande styrs av behov som uppkommer i kulturella, historiska och sociala verksamheter. De kulturhistoriskt utvecklade verksamheterna ses till och med som helt nödvändiga för mänsklig utveckling. I föreliggande arbete gäller de kulturhistoriska aspekterna både det *lärandeobjekt* som fokuseras och den *verksamhet* (undervisningspraktiken) lärandeobjektet gestaltas i.

Leontiev (1978) beskriver mänsklig verksamhet som ett sammanhängande system där ett *subjekt* utför *handlingar* riktade mot ett *objekt*. Leontiev beskriver en *behovsdriven verksamhet* som består av *målinriktade medvetna handlingar* som i sin tur även består av vissa *operationer*. Verksamhet, handlingar och operationer är tätt sammanflätade, varför mänskliga handlingar i en verksamhet kan ses svara mot ett motiv att tillfredsställa mänskliga behov (a.a.). Behov och motiv för en verksamhet kan på det viset bli analytiskt synliga genom de handlingar som genomförs i en verksamhet.

4.3 Didaktisk inriktning

I det följande presenteras den didaktiska inriktning av verksamhetsteori, lärandeverksamhet, som utgör teoretiskt ramverk för detta uppsatsarbete.

4.3.1 Lärandeverksamhet

Utvecklingen av en lärandeverksamhet utgår från Vygotskys (1963/1934) arbeten om hur lärande kan tänkas gå till. Lärande i matematik sker genom deltagande i matematikpraktiker, där specifika kulturella redskap används för mediering (Kozulin, 2003). Centralt i en lärandeverksamhet är att lärande förstås som ett resultat av medierade handlingar via medierande redskap (Kinard & Kozulin, 2012). Lärande ses alltså inte som någon direkt process mellan någon som ska lära och något som ska läras, utan förstås ske via någon form av medierande resurs (Säljö, 2000; Wertsch, 1998). Leontiev (1978) förklarar deltagande i en undervisningspraktik som ett deltagande i tidigare generationers kollektiva kunnande genom de specifika redskap som tas i bruk. Deltagandet innebär att teoretiska begrepp utvecklas mellan och inom deltagarna i en verksamhet. Enligt Vygotsky (1963) är utvecklingen möjlig genom mediering via exempelvis språk, symboler och mer ämnesspecifika redskap. Det är inte de enskilda skolämnena specifikt som är målet för en lärandeverksamhet utan ett tänkande i större perspektiv ”Each school subject is a unique projection of a given ”higher” form of social consciousness (science, art, morality, law) onto the plane of assimilation” (Davydov, 2008, s.137). Vygotsky (1963) påpekar att lärande via ett deltagande i en lärandeverksamhet är en motor för utveckling vilket innebär att utveckling alltid föregås av någon form av lärande.

Teoretiska respektive empiriska begrepp
En lärandeverksamhet är en verksamhet med syftet att utveckla teoretiska begrepp (Vygotsky, 1934). ”[…] the developmental character of learning activity is theoretical knowledge” (Davydov, 2008; s. 120.). Enligt Vygotsky skiljs teoretiska begrepp från empiriska begrepp.

Empiriska begrepp kan uppfattas perceptuellt och utvecklas i spontana aktiviteter såsom interaktioner och deltagande i en vardaglig verksamhet, där kultur och historia fortlöpande utvecklas (Vygotsky, 1934).

Teoretiska begrepp finns bortom det som kan upplevas med våra sinnen, det vill säga de utgörs av det abstrakta. Teoeriska begrepp måste därför enligt Davydov (1990) utvecklas via ämnesspecifika medierande redskap och teoretiska modeller. Kozulin (2003) menar att teoretiska begrepp kan utvecklas om man i en undervisningssituation ser det teoretiska som levande modeller, vilka kan utforskas av elever och lärare tillsammans. Utvecklingen av teoretiska begrepp syftar också till ett lärande för fortsatt lärande (Davydov, 2008). Hur man inom ramen för lärandeverksamhet kan utveckla teoretiska respektive empiriska begrepp diskuteras i det följande.

Att utveckla ett teoretiskt begrepp såsom cirkel genom att utgå från det abstrakta, kan exempelvis innebära att elever urskiljer en punkt, en mittpunkt, runt vilken en linje ritas på exakt samma avstånd. Elever har då möjlighet att utveckla ett kunnande om cirkeln genom mediering av hur en cirkel konstrueras samt hur en cirkel beskrivs med de grundläggande begreppen mittpunkt, radie, diameter, och omkrets (Kozulin, 1990). Att utveckla begreppet cirkel som ett empiriskt begrepp kan exempelvis innebära att begreppet utvecklas utifrån många empiriska observationer av runda objekt i en miljö. Elever kan studera olika föremål såsom hjul, pannkakor och bollar (Davydov, 2008; Kozulin, 1990).

Att utveckla ett teoretiskt kunnande om rationella tal som tal skulle kunna innebära att de multiplikativa och additiva förhållandena i ett tal synliggörs genom exempelvis konstruktion av en modell för dessa tal (Davydov & TSvetkovich, 1991). Att urskilja rationella tal ur empiriska exempel, skulle kunna innebära att elever studerar och opererar med tal ur sitt vardagsliv, exempelvis delar av pizzor, resultat från olika idrottsaktiviteter eller rabatterbjudanden i olika affärer (a.a.). Frågan blir då om det går att utveckla en förståelse för rationella tal som tal utifrån empiriska exempel.

Roth och Hwang (2006) samt Zuckerman (2004, 2007) menar att ett teoretiskt lärande i en lärandeverksamhet bör utgå från det abstrakta, generella och sedan i en process pendla mellan abstrakta, generella, teoretiska strukturer och konkreta empiriska exempel. Ett exempel på att utveckla ett kunnande om rationella tal i en sådan växelverkande process utgörs av Morris (2000) studie där eleverna och läraren först diskuterade hur den mätenhet man valde för jämförelser av sträckor påverkade det mätresultat man fick fram, och sedan undersökte detta genom att göra jämförelser av olika längder. För att gestalta denna process användes bland annat följande frågor: Hur förändras mätresultatet om mätenheten är oförändrad men objektet som ska mätas ökas/minskas? Hur förändras mätresultatet om objektet man mäter är oförändrad, men mätenheten ökas/minskas? Om mätresultatet ökar och enheten är oförändrad, hur ändras då objektet som ska mätas?

Lärandeuppgifter

För att utveckla en lärandeverksamhet måste eleverna erfara ett motiv för att gå in i arbetet med en uppgift (Davydov, 2008). Det kunnande som ska utvecklas måste finnas inbyggt i uppgifterna. Kunnandet kan utvecklas genom att eleverna identifierar problemet i en uppgift och försöker lösa problemet på olika sätt (Repkin, 2003). På så vis utvecklas en lärandeuppgift (learning task) (Davydov, 2008). Det är genom designen av lärandeuppgifter som lärare har möjlighet att påverka behovet av ett kunnande (Repkin, 2003). En ledtråd för att designa uppgifter för eleverna finns i svar på frågor som; Varför behöver vi ett specifikt kunnande? eller Hur har ett specifikt kunnande utvecklats? (Davydov, 2008). En möjlighet att förändra en lärandeverksamhet är att förändra de lärandeuppgifter som gestaltas och som ska lösas i verksamheten (Repkin, 2003).

Lärandehandlingar

I en lärandeverksamhet utförs specifika handlingar då en uppgift eller ett problem bearbetas av elever och lärare (Davydov, 2008). Handlingarna ger möjlighet att lösa en lärandeuppgift och de följer ett visst mönster som Davydov (2008, s.125-126) beskriver som lärandehandlingar. Lärandehandlingarna beskrivs enligt följande (min översättning):

1. Analys av uppgiften för att utröna vari problemet består
2. Formulera villkor hur vi tillsammans förstår problemet
3. Analysera vilka matematiska redskap som bör utvecklas
4. En generell beskrivning konstrueras som en modell för en lösning på problemet
5. Bedöma om lösningen, i form av den metod eller modell som beskrivs, är hållbar
6. Utvärdera modellen för hur en uppgift blivit löst

Dessa lärandehandlingar måste eleverna få utrymme att ta del av i undervisningen för att den ska kvalificeras som en lärandeverksamhet. Lärandehandlingar innebär en utveckling av elevers kunnande och av elevers förmåga att reflektera (Zuckerman, 2007). Hur lärandehandlingar kan gestaltas i undervisning beskrivs nedan genom verksamheten i Morris (2000) forskningslektioner. Lärandeuppgifterna i Morris studie utgörs av jämförelser av längder som eleverna genomförde med olika långa pappersremsor där en lång pappersremsa (B) jämfördes med en kortare pappersremsa (F).

För att eleverna i Morris (2000) studie skulle kunna analysera problemen enligt punkt 1 ovan var eleverna tvungna att särskilja *mätenheten* och *enheten som mätenheten skulle delas i*. Därför designades jämförelserna i de inledande uppgifterna så att de alltid gav ett heltal som mätresultat. I de fortsatta uppgifterna skulle mätresultaten anges med rationella tal.

De villkor som uppgifterna i Morris studie uppfyllde, se punkt 2 ovan, var att samma mätenhet skulle användas vid jämförelserna. I den problemanalys som lärare och elever gemensamt genomförde ingick att identifiera denna mätenhet som ”en etta” för mätenheten. Ett mödosamt arbete fick läggas ner i lektionerna i Morris studie för att eleverna skulle se att denna mätenhet representerade avståndet mellan 0 och 1 på tallinjen.

De redskap som togs i bruk enligt punkt 3 i Morris studie var 1) fyra språkliga benämningar; ”att mäta ” (to measure), ”det som ska mätas” (object of measure), ”mätenhet” (unit of measure) och ”enheten som mäteneheten kan delas i” (unit), 2) olika generella modeller för rationella tal samt 3) tallinjen.

Elever och lärare utvecklade tillsammans en generell modell i flera steg, se punkt 4 ovan. Först etablerade de en modell för det multiplikativa förhållanden mellan mätenheten och objektet som skulle mätas enligt modellen $B = x \cdot F$. Därefter utvecklades en modell för de mätresultat som bestod av ett antal hela mätenheter *och* ett antal mindre enheter av denna mätenhet. Modellen utvecklades till $B = x \cdot F + rem$, där *rem* står för remainder.

Lösningarna på de uppgifter som eleverna skulle lösa kunde de bedöma, punkt 5, genom att de först fick svara på frågor gällande ett antal jämförelser och därefter genomföra jämförelserna. Hur detta gick till har presenterats under rubriken ”Teoretiska begrepp - abstrakt till konkret” tidigare i detta avsnitt.

Modellen utvärderades i enlighet med punkt 6, genom att eleverna diskuterade huruvida och varför de lösningar de själva och den kamrat de arbetade med var rimliga och till och med korrekta.

Reflektion

I en lärandeverksamhet är det inte tillräckligt att eleverna reflekterar över egna lösningar, utan de ska även reflektera över hur kamrater formulerar sina lösningar (Davydov, 2008). Reflektion i en lärandeverksamhet beskriver Zuckerman (2004) enligt följande:

> Reflection is a basic human ability (a) to consider the goals, motives, methods, and means of one's own and other people's actions and thoughts; the

> mental facet of this ability is sometimes called metacognition; (b) to take other people's point of view; view things from perspectives other than one's own; and (c) to understand oneself; study one's own strong points and limitations in order to find the ways to excel or to accept one's shortcomings (Zuckerman, 2004, s.10).

Davydov (2008) och Zuckerman (2004) samt Kinard och Kozulin (2012) menar att reflektion är en grundläggande mänsklig förmåga som kan och bör utvecklas. Exempelvis kan elever vara delaktiga i att diskutera problem i uppgifter som ska lösas för att synliggöra mål, motiv och meningen med en verksamhet. Reflektion kan också tränas genom att elever diskuterar egna och andras lösningar och försöker förstå och förklara hur kamraterna har tänkt. Reflektion i en lärandeverksamhet baseras på sociokulturella antaganden vilket inkluderar att man kan ta en annan människas perspektiv, det vill säga att eleverna kan och får möjlighet att reflektera över varandras tänkande.

4.3.2 Medierande redskap

I en lärandeverksamhet kan lärande, som tidigare beskrivits, förklaras som att bli förtrogen med specifika medierande redskap i aktiva processer (Kozulin, 2003, Repkin, 2003). Med aktiva processer menar dessa forskare att det inte är tillräckligt att dessa specifika redskap presenteras för eleverna. För att lära måste istället eleverna erbjudas möjligheter att ta bruk av dessa relevanta ämnesspecifika redskap för att lösa ett problem. Med stöd av redskapen utvecklas modeller som synliggör kunnande. Modellerna utvecklas till nya redskap för att lösa nya problem vilket gör det möjligt att i sin tur utveckla nya mer generella modeller och att delta i mer kvalificerade verksamheter (jfr Davydov, 2008). Redskapen innebär möjligheter att förstå något som annars inte skulle vara möjligt att förstå, eftersom de inbegriper generationers kulturellt lagrade kunnande (Kozulin & Kinard, 2008). För att utveckla en lärandeverksamhet blir det därför avgörande både *att* medierande redskap etableras och även *hur* dessa redskap etableras. De specifika redskap som tas i bruk och som approprieras av eleverna i en lärandeverksamhet kan, utan distinkta gränser, beskrivas vara av materiell, kommunikativ eller symbolisk karaktär (jfr Kinard & Kozulin, 2012). Materiella redskap kan exempelvis utgöras av fysiska redskap. Redskap av kommunikativ karaktär kan utgöras av guidning som sker via språklig kommunikation. Redskapen som tas i bruk möjliggör teoretiskt arbete när nya redskap och modeller utvecklas.

Symboler

Symboler som ses ha betydelse för mediering av matematiska begrepp kan enligt Kinard och Kozulin (2012) beskriva kvantiteter, operationer, kognitiva jämförelser eller representationer. Symbolerna kan utgöras av exempelvis numeriska symboler 1, 2, 3, algebraiska symboler a, b, c, symboler i form av tecken såsom <, >, =. Symbolerna kan också utgöras av färger eller en tom ruta, prickar, etcetera (Davydov, 2008; Sophian, Garyantes & Chang, 1997). För att symbolerna ska utgöra ett medierande redskap ska de användas för en specifik innebörd, det vill säga symbolerna ska representera ett visst kunskapsinnehåll. Exempelvis utgjorde *r* i våra lektioner en symbol för den *röda mätenheten*, vilket var en av de första elevinitierade symbolerna som utvecklades i lektionerna. Symbolerna användes som stöd i ett teoretiskt matematiskt arbete för att utveckla matematiskt tänkande.

Generella modeller

I en algebraisk lärandeverksamhet tas algebraiska symbolerna i bruk för att utveckla modeller som synliggör ett specifikt kunnande (Davydov, 2008). För att beskriva en modell hänvisar Davydov till ett citat av Shtoff från 1966[7]:

> A model is a mentally conceived or materially realized system that, by representing or reproducing the object of study is capable of replacing it so that studying the model provides new information about the object. (Davydov, 2008. s. 94)

Utifrån Shtoffs beskrivning inbegriper en modell det kunskapsinnehåll som behövs för att utveckla ett kunnande. Davydov beskriver modeller som att de ”copies the structure of the object” (Davydov, 2008. s. 95). En modell kan alltså synliggöra ett teoretiskt begrepp, exempelvis strukturen för ett rationellt tal. Begreppet kan diskuteras samtidigt som modellen utvecklas. En generell modell innefattar kunnandets mest grundläggande egenskaper, ”the germ cell” (Davydov, 1990, 2008; Schmittau, 2004). Ett exempel på en modell för rationella tal, utvecklad av Davydov och TSvetkovich (1991) presenterades i avsnittet 2.3.4 i denna uppsats.

Utvecklingen av modeller är en del i ett teoretiskt arbete. För att utveckla modeller som synliggör teoretiska begrepp är växelverkan mellan teoretiska och empiriska begrepp en nödvändighet (Roth & Hwang, 2006; Zuckerman, 2004). Van Dijk, van Oers, Terwel och van den Eeden (2003) beskriver att modeller kan ses som broar mellan det teoretiskt abstrakta och det konkret empiriska, det vill säga modellerna kan mediera teoretiska begrepp. Van Dijk m.fl. påvisar att den möjlighet eleverna har att delta i utvecklingen av modeller, är avgörande för elevernas utveckling av teoretiska begrepp.

[7] Shtoff, V.A. (1966). *Modelirovanie i filosofiya*. (s.19) Moscow-Leningrad.

5. METOD

> The learning tasks were always aimed at the search for new means and tools for solving problems.
> (Zuckerman, 2004 s. 11.)

I föreliggande kapitel beskrivs arbetet med studiens design. Först beskrivs learning study som forskningsansats och designen av de två learning study-projekten som genomfördes i studien. Därefter beskrivs den grunddesign av forskningslektionerna och grunddesignen av de lärandeuppgifter som gestaltades i lektionerna samt studiens dataproduktion. Avslutningsvis redovisas det kartläggningsarbete som genomfördes före och efter lektionerna.

5.1 Learning study

I uppsatsens inledning diskuterades olika kvalitativa forskningsansatser som är användbara inom utbildningsforskning. Den studie som till stora delar inspirerat det föreliggande arbetet, Morris (2000) genomfördes som en longitudinell designstudie där Morris studerade hur olika elever utvecklade en förståelse av rationella tal genom att olika innehåll gestaltades i Morris olika forskningslektioner. Utifrån syftet med föreliggande studie fanns större möjligheter att besvara de tre frågeställningarna med learning study som forskningsansats.

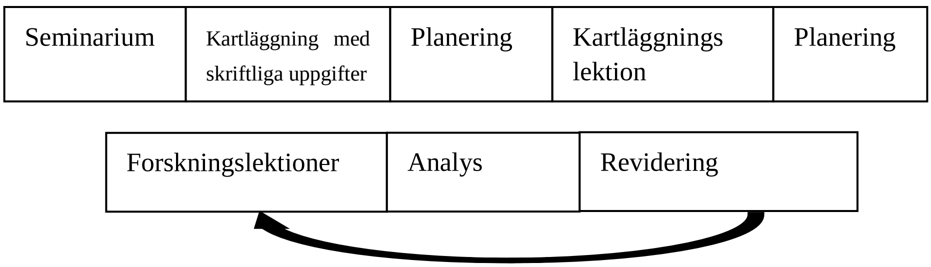
Designen av learning study-arbetet inspirerades av tidigare genomförda learning studies (se exempelvis Gustafsson, 2008; Holmqvist, 2006; Kullberg, 2010; Pang & Marton, 2003; Wernberg, 2009). Ett exempel på arbetsgång i en learning study beskrivs av Pang och Marton (2003) och kan summeras i följande fem steg med min egen översättning: 1) ett lärandeobjekt väljs som man av erfarenhet vet att kan vara svårt att lära. 2) ett förtest genomförs och analyseras 3) lektionen planeras genom samarbete mellan lärare och forskare. Lektionen genomförs och dokumenteras, förslagsvis med videokamera 4) lektionen analyseras utifrån dokumentationen samt elevers resultat på för- respektive eftertest. Eventuellt genomförs ytterligare lektioner efter revidering 5) dokumentation av nyvunnen kunskapen som kan delges intresserade kollegor.

Generaliserbarhet är ett forskningsetiskt krav som alltid kräver reflektion i en kvalitativ forskningsansats (jfr Larsson, 2009). För att generalisera kunskapsproduktionen ur en learning study krävs en reflektion över bland annat av de avgränsningar som gäller upplägget med en enda lektion som utvecklas samt att antalet informanter ofta är begränsat. Samtidigt som denna avgränsning kan ses som begränsande för möjligheten att generalisera resultaten, möjliggör den även för att begränsa de faktorer som påverkar i en forskningsmiljö som utgörs av en undervisningssituation. Generaliserbarheten för resultaten i föreliggande studie kan även diskuteras utifrån hur generell utvecklingen av en lärandeverksamhet kan ses vara. Analysresultaten kan ses som *ett* exempel på hur en sådan verksamhet kan utvecklas. Den empiriska förankring (jfr Larsson, 2005) i beskrivningen av hur lärandeverksamheten växte fram i det iterativa arbetet gör det möjligt för varje läsare att själv avgöra vad som kan vara överförbart till en annan specifik elevgrupp (a.a.). Resultatet för det iterativa arbetet har även förankring i tidigare forskningsresultat (jfr Zuckerman, 2004), vilket rimligen ökar möjligheten till generalisering genom det Larsson (2009) kallar mönstergeneralisering. Larsson skriver att ett forskningsresultat kan bidra med att förstå fenomen på nya sätt, i det här resultatet hur en lärandeverksamhet kan utvecklas. De medierande redskapen och det innehåll som dessa redskap medierar kan antas vara generella och möjliga att ta i bruk i olika undervisningspraktiker (jfr Kinard & Kozulin, 2012). Resultaten som rör vilket kunnande dessa redskap synliggör kan rimligen ses som generaliserbara genom att dessa resultat kan förankras i resultat ur tidigare forskning (jfr Larsson, 2005).

5.1.1 Design av learning study i detta arbete

I studien har två learning study genomförts. I learning study ett har tre lektioner genomförts, och i learning study två har två lektioner genomförts. I learning study ett benämndes forskningslektionerna lektion 1, lektion 2 respektive lektion 3. I learning study två benämndes forskningslektionerna lektion 4 respektive lektion 5.

Learning study-cyklerna i föreliggande arbete designades enligt figur 9. För lärargruppen startade arbetet med seminarier om olika möjligheter att genomföra undervisning rörande rationella tal. Utifrån egna erfarenheter av undervisning, utifrån tidigare forskning och genom möte med nya perspektiv på matematikundervisning diskuterades under detta seminarium hur uppgifter och lektioner skulle kunna designas. Allra först designades en inledande kartläggning som bestod av skriftliga uppgifter till eleverna. Detta arbete beskrivs i avsnittet om kartläggningsarbetet. Utifrån denna kartläggning och fortsatta studier av matematikundervisning enligt Davydovs (2008) tankar om lärandeverksamhet, lärandehandlingar och lärandeuppgifter designades sedan en lektion som fick funktionen som en kartläggningslektion. Grunddesignen av kartläggningslektionen presenteras senare i detta kapitel. Efter att kartläggningslektionen genomförts planerades, genomfördes, analyserades, och reviderades forskningslektionerna.



Figur 9: Design av learning study-arbetet.

5.2 Grunddesign av forskningslektionerna

Grunddesignen för våra forskningslektioner utgjordes av Zuckermans (2004) sex punkter för handlingar vilka bör genomsyra en lektion för att lektionen ska ha möjlighet att utvecklas till en lärandeverksamhet. I beskrivningen av dessa punkter utgår Zuckerman från Davydovs beskrivningar av lärandehandlingar, se uppsatsens teorikapitel.

1) Problemidentifiering
   Elever och lärare identifierar och analyserar en uppgift tillsammans. Är uppgiften möjlig att lösa?
2) Redskapsetablering
   Prova redskap genom att ta reda på vad som är nytt och vad som är känt sedan tidigare.
3) Lösningsförslag
   Elever föreslår lösningar.
4) Modellutveckling
   Elever och lärare utvecklar en generell modell tillsammans.
5) Modellprovning
   Den generella modellen provas med numeriska exempel.
6) Elevreflektioner
   Eleverna argumenterar för att modellen fungerar.

5.3 Grunddesign av lärandeuppgifter

Syftet med uppgifterna i lektionerna var att de skulle fungera som lärandeuppgifter för eleverna att urskilja rationella tal som tal. Uppgifterna designades därför med hänsyn till hur man i tidigare studier arbetet med jämförelser av kvantiteter för en fördjupad förståelse för rationella tal (se exempelvis Davydov & TSvetkovich, 1991; Morris, 2000). Uppgifterna designades även med stöd i variationsteori (se Marton & Booth, 1997). Designen av uppgifterna tog även hänsyn till de analyser lärargruppen gjorde av det inledande kartläggningsarbetet med skriftliga uppgifter.

En skillnad mellan våra uppgifter och uppgifterna i Davydov m.fl. samt Morris tidigare studier utgjordes av att vi valde det strukturerade materialet cuisenairestavar för längdjämförelserna, medan övningarna i Davydovs och Morris studier är genomförda med pappersremsor. Cuisenairestavarna visas i figur 10.

Figur 10 Cuisenairestavar

Cuisenairestavar är ett material i set om tio stycken olikfärgade stavar, där den kortaste är 1 cm och den längsta 10 cm. Varje längd har sin egen färg. Stavarnas längd ökar med 1 cm i taget (Malmer, 1988). Malmer (1990) framhåller att stavarna inte är indelade i bestämda enheter. En och samma stav ska kunna symbolisera olika tal eller värden beroende på vilka talrelationer som ska representeras. Om den vita staven symboliserar värdet 5 föreställer den röda staven, som är dubbelt så lång, värdet 10. Den vita staven i relation till den röda är alltid hälften, medan den röda i relation till den vita alltid är dubbelt så mycket. Det är även möjligt att benämna de olika längderna med abstrakta algebraiska symboler. Exempelvis kan längden av den röda staven benämnas r och längden av den vita benämnas v, r är då lika med $2v$, det vill säga $r = 2v$.

Uppgifterna i studien designades även med hänsyn till variationsteori. Med stöd av variationsteorin kan ett specifikt kunskapsinnehåll erfaras genom att aspekter som är särskilt centrala, inom variationsteori kallade kritiska aspekter, blir möjliga att urskilja genom olika variationsmönster (Marton & Booth, 1997; Pang & Marton, 2003). Olika mönster av variation presenterar Marton (2014) som kontrast eller separation, generalisering och fusion. En variation ska inte ske slumpvis, utan enligt en medveten ordning av de olika variationsmönstren (Ling Lo, 2012; Marton & Tsui, 2004). Även Runesson

(2006) menar att de dimensioner och den ordning med vilken dessa dimensioner öppnas upp är avgörande för vad man kan lära. Marton (2014) menar att lärande sker i ordningen kontrast-separation-fusion.

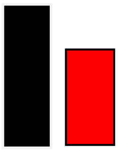
5.3.2 Lärandeuppgifter i forskningslektionerna

Uppgifterna i forskningslektionerna skulle erbjuda eleverna möjlighet att urskilja rationella tal som att de är tal och att dessa tal finns mellan de hela talen.

I de fyra första uppgifterna skulle längden av en svart stav jämföras med längden av olika andra stavar. De andra stavarna utgjorde mätenheter i de olika jämförelserna. Problemet som skulle identifieras i uppgifterna var att mätenheten inte gick jämt upp i den svarta staven, varvid mätresultatet var tvunget att anges som ett rationellt tal (jfr Davydov & TSvetkovich, 1991). Mätresultatet var tvunget att anges med en heltalsdel och en bråkdel. Mätenheten var tvungen att ”delas” i mindre enheter för att ett mätresultat skulle kunna anges. Denna mindre enhet var ofta den kortaste staven av cuisenairestavarna, den vita staven. För att jämföra längderna av stavarna kontrasterades först mätenheten mot den stav som skulle mätas. Därefter separerades antalet mindre enheter som de olika mätenheterna skulle delas i från mätenheten, genom att den mindre enheten var den samma medan mätenheterna varierade. Genom separationen kunde eleverna urskilja att mätenheten var tvungen att delas i mindre delar. Genom algebraiska symboler kunde eleverna urskilja att detta antal påverkade nämnaren i bråkdelen av talet. Därefter varierades antalet små enheter som behövdes för att mäta objektet, genom en kontrast. Algebraiska symboler synliggjorde att dessa antal utgör täljaren i bråkdelen av talen.

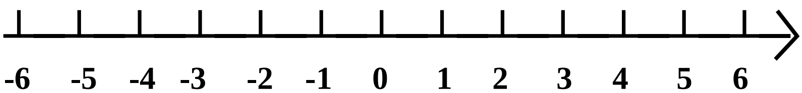
De fyra första uppgifterna i forskningslektionerna presenteras här.
Uppgift 1:

1) Mät den svarta staven med röda stavar[8].



Redovisa resultatet:

Markera talet på tallinjen:



Den jämförelse eleverna förväntades genomföra i denna uppgift kunde exempelvis se ut som i bild 1.

Bild 1: Den svarta staven jämfördes med röda stavar.

Resultatet av jämförelserna var att den svarta staven kunde anges med tre och en halv röd stav. Detta mätresultat kunde noteras som tal i decimalform *Svart = 3,5 röda*, tal i blandad bråkform *Svart = 3 1/2 röda* eller som *Svart = 3 röda + 1/2 röd* enligt den generella modellen för rationella tal *S = xr + (m/n) r*.

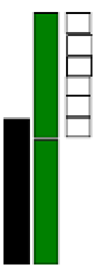
[8] Observera att längden av de stavar som ingick i uppgifterna, inte var ritade i skala.

Uppgift 2:
I uppgift 2 var den röda staven, det vill säga mätenheten utbytt mot en ljusgrön stav. Jämförelsen som kunde genomföra syns i bild 2:

Bild 2: Den svarta staven jämfördes med gröna stavar.

Mätresultatet i uppgift 2 var två hela och en tredjedel. Genom att erbjuda eleverna uppgifter med mätresultaten i uppgifterna 1 och 2, fick eleverna genom variationsmönstret kontrast, erfarenhet av både tal i decimalform och tal i bråkform. Dessutom synliggjordes nödvändigheten med tal i bråkform eftersom 2 + 1/3 inte kan anges som ett exakt värde i decimalform.

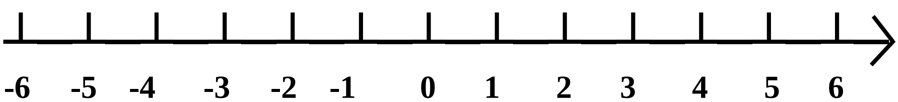
Uppgift 3:



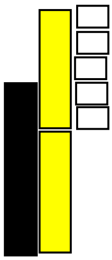
Hur många mörkgröna får plats i en svart?

Skriv svaret här:

Markera svaret på tallinjen:



Uppgift 4:



Hur många gula får plats i en svart?

Skriv svaret här:

Markera svaret på tallinjen:

Kullberg och Runesson (2013) visar att stambråk som exempelvis 1/6 är lättare för elever att operera med än tal som 2/6. Syftet med denna uppgift var att försätta eleverna i en situation där de var tvungna att förhålla sig till ett sådant mätresultat. Även i Morris (2000) studie introducerades stambråk, på formen 1/*n* först, för att sedan genom mätningar utveckla bråk av formen *m* • (1/*n*) det vill säga *m/n*.

5.4 Dataproduktion

Här följer en presentation av hur data producerats och vad datamaterialet består av.

5.4.1 Datamaterial

Det första projektet genomfördes från november 2012 till mars 2013, det andra projektet genomfördes från september till december 2013. Båda learning study projekten har genomförts av en lärargrupp där jag som forskare och specialpedagog varit gruppens ledare. Ytterligare en lärare har deltagit i båda learning study projekten, en annan lärare var med endast i det första projektet och två andra lärare var med endast i det andra projektet. Alla lärare som deltagit i studien har varit behöriga att undervisa i matematik i årskurs 4-6. Det är samma lärare som undervisat i samtliga lektioner. Vi andra har deltagit som observatörer i lektionerna. Den lärare som undervisat i lektionerna var nyanställd på skolan hösten 2012, det vill säga samma höst vi genomförde det första projektet. Den läraren var även den ende manlige läraren i projektet. Den tredje läraren i learning study ett har varit anställd på skolan i fem år. Av de två lärarna som enbart deltog i learning study två, var en nyanställd på skolan och en lärare har arbetat på skolan i tio år. Ingen av lärarna har tidigare arbetat med learning study eller en tanke om en lärandeverksamhet enligt Davydovs definition. Lektionerna har genomförts i årskurs 4 och de har genomförts på samma skola under, som tidigare nämnts, två olika läsår. Elevantalet i de olika lektionerna varierade mellan elva och tjugoen elever. Totalt deltog 76 elever. Sammantaget består det empiriska datamaterialet av:

- En kartläggning av eleverna genom ett antal skriftliga arbetsuppgifter.
- Videoupptagning från kartläggningslektionen.
- Kartläggningen efter lektionerna som bestod av en uppgift där eleverna skulle ange ett mätresultat för en jämförelse, och samma skriftliga uppgifter som genomfördes som kartläggning före lektionerna.
- Totalt fem filmade lektioner. Från den learning study som genomfördes läsåret 12/13 finns tre filmade lektioner i tre olika elevgrupper. Lektionerna var mellan 40 och 60 minuter långa. Från den learning study som genomfördes under läsåret 13/14 finns två filmade lektioner i två olika elevgrupper. Lektionerna var mellan 60 och 90 minuter långa.
- Elevernas arbetsmaterial från lektionerna.
- Loggbok från lärararbetslagets träffar i learning studyarbetet, förd av mig som forskare. Sammanfattande anteckningar har delgetts samtliga deltagare.
- Loggbok från spontana träffar på skolan då lektionerna diskuterades utanför de planerade träffarna. Även denna loggbok har jag som forskare fört. Materialet är samlat med hjälp av samtliga deltagande lärare.

5.4.2 Urval och etiska överväganden

Lärare och elever som deltagit i studien arbetar i årskurs 4. Årskursen valdes utifrån att internationella studier av undervisning om rationella tal visar att konceptuell förståelse för rationella tal är i fokus för undervisningen i tidigare årskurser (Niemi, 1996) och att procedurer och operationer med dessa tal dominerar undervisning i de högre årskurserna (a.a.).

> Students who have not constructed fraction understanding by the end of elementary school are unlikely to get many additional opportunities to do so through instruction, […] (Niemi, 1996, s.352.).

Skolan där studien är genomförd har en interkulturell profil och klasserna har många elever som har sitt lärande i matematik på sitt andraspråk. Klasserna har också ett antal elever med specialpedagogiska behov inkluderade. Urvalet av klasserna gjordes för att utnyttja mångfalden i heterogena elevgrupper som resurs för att studera en undervisningspraktik som systematiskt förändrades för att utveckla en lärandeverksamhet.

Studien följer vetenskapsrådets etiska regler för forskning (http://codex.vr.se/manniska1.shtml). För att leva upp till informationskravet i dessa etiska regler har föräldrar informerats på ett föräldramöte, och eleverna informerats i klasserna. Föräldrarna hade inga invändningar mot att en studie genomfördes i deras barns klasser, de hade inte heller några invändningar mot att barnen deltog i forskning med det syfte som presenterades. Däremot ville föräldrarna på föräldramötet veta exakt hur vi skulle använda filmerna. Även eleverna ville, när de informerades om studien, veta hur filmerna skulle användas. Veckan efter föräldramötet fick föräldrarna ett missivbrev där de kunde ge tillstånd till att deras barn deltog i studien. Vid undertecknandet av missivbrevet medgav vårdnadshavarna att dokumenterat material fick användas i denna studie. Om det blir aktuellt med annan användning av det filmade materialet kommer vårdnadshavare att kontaktas på nytt. Skolans rektor och kommunens skolhuvudman, resultatchef för inkluderingsområdet, har tagit del av detta dokument (se Vetenskapsrådet, 2011).

Det kommer ingenstans i avhandlingstexten att röjas var studien är genomförd. De elever eller de lärare som deltar i studien kommer inte heller att röjas på något ställe i redovisningen av studien. Det är tveksamt om elever ens kommer att känna igen enskilda citat, då de citat som används endast fokuserar det kunnande som är i fokus i de olika lektionerna. Konfidentialitetkravet där kravet på anonymitet står framskrivet kan ändå vara ett problem för studier av det här slaget. Learning study projekten genomförs tillsammans med lärare som med säkerhet, trots anonymitet, känner igen sig i resultatet. Självklart kommer information om enskilda elever och lärare att behandlas med sekretess. I de elevsamtal som citeras i resultatet har eleverna fått fingerade namn, och citat av det läraren säger noteras endast med läraren (se Vetenskapsrådet, 2011). Runesson (1999) genomförde sin avhandlingsstudie tillsammans med fem aktiva lärare. Hon diskuterar fördelar och nackdelar med att lärarna kan känna igen sig själva. Runesson skriver att det kan vara jobbigt att vara granskad som professionell, men att ett igenkännande även kan fungera som en katalysator för dem som vill utveckla sin undervisning. Vad gäller föreliggande studie var alla lärare som deltog i learning study projektet, speciellt jag som forskare, ansvariga för den undervisning som genomfördes. Det är min förhoppning att ingen lärare känner sig utpekad på något vis.

Ytterligare ett dilemma att förhålla sig till i den här typen av aktionsforskning är att relationerna i det arbetslag som genomför studien bör vara goda. Deltagarna i en learning study kommer varandra nära och analys av det inspelade materialet får inte misstolkas som kritik utan som möjligheter till utveckling av undervisning (se Adamson & Walker, 2011). Föreliggande studie fokuserade hur undervisning kan förändras, vare sig den är perfekt från början eller inte. Det är undervisningen som är i fokus för studien, inte enskilda personer.

5.4.3 Lärarnas respektive forskarens roll

Alla lärare i lärararbetslaget var gemensamt ansvariga för den undervisning som gestaltades i lektionerna. Även de analyser som genomfördes i learning studyarbetet var vi gemensamt ansvariga för. Som forskare och ledare för arbetet hade jag huvudansvaret att tillföra nya idéer och att arbetet i lärararbetslaget var planerat och strukturerat. Mitt ansvar var också att se till att ingen lärare kände sig utsatt eller utelämnad i det dokumenterade arbetet. Allt analysarbete som skett efter avslutat learning studyarbete bär jag som forskare ensamt ansvar för. Deltagande lärare har haft möjlighet att läsa manus innan det gick i tryck.

5.4.4 Dokumentation av lektioner

Lektionerna i learning study-projekten dokumenterades med videoinspelning. Två videokameror användes, en kamera filmade läraren och en filmade elevgruppen. Filmerna utgjorde dels underlag för lärargruppens arbete med design och revidering av lektionerna och dels underlag för djupare analyser av den framväxande lärandeverksamheten. Lärargruppens träffar dokumenterades till vissa delar med ljudupptagning och till vissa delar med loggboksanteckningar (jfr Björndal, 2002). Eftersom learning study-projekten skedde i arbetslag som träffades även utanför learning studyarbetet påverkades studien av det ständigt pågående arbetet på skolan. Insikter och resultat kom fram under de planerade mötena, men även vid andra tillfällen då lärargruppen träffades. Diskussioner vid sidan av de planerade träffarna dokumenterades i loggboken.

5.4.5 Dokumentation av elevsamtalen under lektionen

Elevsamtalen dokumenterades med MP3spelare. Eleverna gav ofta korta svar och ibland med väldigt låg röst. Svårigheten som Kullberg och Runesson (2013) beskriver med att urskilja elevernas röster var ibland påtaglig. MP 3 inspelningarna utgjorde därför ett bra komplement till ljudet på filmerna. I de tre första forskningslektionerna då eleverna satt i grupper runt runda bord, låg MP3spelarna på elevernas arbetsbord. I learning study två var eleverna placerade i par, och arbetade därför mer enskilt och mer tillsammans i helklass där läraren ledde diskussionerna. Här fanns MP3spelarna istället runt halsen på den undervisande läraren.

5.5 Kartläggningsarbetet i learning studyarbetet

Kartläggningsarbete i learning study utgörs ofta av skriftliga för- och eftertest som genomförs i direkt anslutning till lektionerna. Sådana relativt strikta och begränsade test kan ses som ett arv från designexperiment, där testen är tänkta att mäta effekten av en intervention (Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer & Schauble, 2003). I föreliggande arbete ersattes för- och eftertest med en kartläggning i två delar dels inför forskningslektionerna och dels efter forskningslektionerna. Kartläggningen inför forskningslektionerna bestod av 1) skriftliga uppgifter som samtliga elever genomförde och 2) en kartläggningslektion som genomfördes i samtliga elevgrupper. Kartläggningen efter forskningslektionen bestod av 1) samma skriftliga uppgifter som innan lektionerna och 2) analyser av elevernas lösningar till uppgifterna de arbetat med under lektionen.

5.5.1 Kartläggning med skriftliga uppgifter

Designen av kartläggningen med skriftliga uppgifter som genomförts i elevgrupperna beskrivs först. Uppgifterna som användes presenteras i det följande.

1. Finns tal mellan 0 och 1?
   Hur tänker du då?
   Finns tal mellan 0 och 2?
   Hur tänker du då?

Syftet med uppgift 1 var att ta reda på hur eleverna förklarade att det finns tal mellan de hela talen (jfr explanation task Niemi, 1996). Skillnaden mellan begreppen tal respektive siffra kan ställa till bekymmer för eleverna i denna uppgift (Steffe & Olive, 2010). De flesta elever som ansåg att det inte fanns tal mellan 0 och 1, motiverade detta med att ”när man räknar säger man först 0 sen 1, och alltså finns inga tal där emellan” (citat från en elevlösning). Eleverna reflekterade inte över begreppen tal eller siffra utan hänvisade till ramsräkning för att veta om det finns tal mellan två hela tal. Vi tolkade därför att siffra respektive tal inte påverkade elevernas svar. Elevernas svar om det finns tal eller inte mellan två hela tal finns redovisade i tabell 2 och 3.

2. Beskriv talet ”en halv” på minst fyra olika vis.

Eleverna ombads representera en halv genom en bild, med en figur, med siffror, samt representera en halv på en tallinje de själva var tvungna att konstruera. Vi ville veta om eleverna kände till att ett och samma tal kan anges dels som tal i bråkform och dels som tal i decimalform. Att representera ett tal i bråkform som bild eller figur löste eleverna med representationer av både del av en helhet och del av ett antal (jfr Niemi, 1996). Elevsvaren finns redovisade i tabell 2 och 3.

3. Storleksordna följande tal på en tallinje 0,5 0,05 0,005 1/2 5/10 5/100 5/1 0,12.

Den här uppgiften skulle visa tre olika aspekter av rationella tal. För det första skulle uppgiften visa om eleverna kunde placera dessa tal på en tallinje (jfr Olive, 2011). För det andra skulle uppgiften visa om eleverna visste att samma talvärde kan representeras på olika vis, både som tal i bråkform och som tal i decimalform. För det tredje skulle uppgiften visa om eleverna kunde ordna talen i storleksordning, eller vilket annat sätt elevernas svar organiserade talen. Eleverna tyckte att denna uppgift var svår. De flesta grupperade talen i två grupper, tal i bråkform i en grupp och tal i decimalform i en grupp. Analys av uppgiften finns redovisad i tabell 2 och 3.

Tabell 2. Analys av kartläggningen med skriftliga uppgifter i learning study 1.

Lektion nr	**Uppgift**	**Svar**	**Antal elevsvar före lektionerna**	**Antal elevsvar efter lektionerna**
1 n=11	Finns det tal mellan 0 och 1	Ja Nej	2 9	10 1
	Skriv en halv på olika vis	0,5 1/2 0,5 och 1/2 0/5, 1,5, ½, 1/5	1 1 0 9	6 4 1 0
	Storleksordna på tallinje	Parat ihop ½ och 0,5 I grupper	2 9	10 1
2 n=18	Finns det tal mellan 0 och 1	Ja Nej	7 11	18 0
	Skriv en halv på olika vis	0,5 1/2 0,5 och 1/2 0/5, 1,5, 0,1, ½, 1/5	2 10 0 6	3 12 1 2
	Storleksordna på tallinje	Parat ihop ½ och 0,5 I grupper	5 13	18
3 n=13	Finns det tal mellan 0 och 1	Ja Nej	0 13	11 2
	Skriv en halv på olika vis	0,5 1/2 0,5 och 1/2 0/5, 1,5, 0,1, 1/5	1 1 0 10	4 2 1
	Storleksordna på tallinje	Parat ihop ½ och 0,5 I grupper	0 13	13

Tabell 3. Analys av kartläggningen med skriftliga uppgifter i learning study 2.

Lektion nr	**Uppgift**	**Svar**	**Antal elevsvar före lektionen**	**Antal elevsvar efter lektionen**
4	Finns det tal mellan 0 och 1	Ja Nej	3 18	18 3
n=21	Skriv en halv på olika vis	0,5 1/2 0,5 och 1/2 S (halv 8), 2/1, 2,50, 5,0,	4 3 14	4 15 2
	Storleksordna på tallinje	Parat ihop ½ och 0,5 I grupper	3 18	17
5	Finns det tal mellan 0 och 1	Ja Nej	3 10	13
n=13	Skriv en halv på olika vis	0,5 1/2 0,5 och 1/2 (halv femma), 3,5, 4/2, 8/4 5,5, 1,5, 2,5, valp[9]	 13	1 5 7
	Storleksordna på tallinje	Parat ihop ½ och 0,5 I grupper	3 10	13

Analys av de skriftliga kartläggningsuppgifterna före lektionerna bekräftade det vi redan misstänkt utifrån tidigare forskning gällande hur elever kan förväntas hantera rationella tal som tal i uppgifterna. Resultatet av detta arbete gav oss signaler om att

- endast ett fåtal elever hade en förståelse av att det finns tal mellan de hela talen
- endast ett fåtal elever kunde representera rationella tal med hjälp av aritmetiska symboler
- eleverna kunde konstruera en tallinje för hela tal, men inte använda den för att markera rationella tal.

Analys av resultaten på de skriftliga kartläggningsuppgifterna efter lektionerna ger en antydan om att eleverna efter lektion 5 klarade kartläggningsuppgifterna bättre än efter de övriga lektionerna. Efter den sista lektionen kunde alla elever svara att det finns tal mellan 0 och 1 och att alla eleverna efter den lektionen även lyckades att representera en halv med 0,5 eller 1/2 eller med båda dessa representationsformer.

[9] Eleven förklarade att en halv är något lite av något och en valp är en liten hund.

5.5.2 Kartläggningslektionerna

Kartläggningslektionen designades och gestaltades enligt samma grundprincip för samtliga klasser. I en kort gemensam inledning i lektionen visade läraren cuisenairestavar för eleverna. Några elever hade använt detta material tidigare till problemlösning, andra elever hade aldrig arbetat med materialet.

Uppgifterna i kartläggningslektionen utgjordes av tre uppgifter som lärararbetslaget konstruerat samt två uppgifter eleverna skulle konstruera själva. Syftet med de uppgifterna som lärarna konstruerat var att eleverna skulle försättas i en situation där de kunde urskilja mätenhetens betydelse för mätresultatet. Enligt variationsteorin varierades mätenheten medan det objekt som skulle mätas hölls konstant. Syftet med de uppgifter eleverna konstruerade själva, var att eleverna skulle upptäcka nödvändigheten av att ange ett mätresultat med andra tal än endast hela tal. Den analys som gjordes av den uppgiften i kartläggningslektionen användes som jämförelse med hur elever hanterade liknande uppgifter efter forskningslektionerna.

Eleverna använde cuisenairestavarna för att lösa samtliga uppgifter. Mätresultaten skulle markeras på en tallinje. I bild 3 syns hur avståndet från noll till värdet för mätresultatet redovisades. De tre lärarkonstruerade uppgifterna bestod av att en längre stav skulle mätas med tre olika kortare stavar. Dessa tre uppgifter gav ett heltal som mätresultat. De kortare stavarna utgjorde olika mätenheter. Samma långa stav kunde beskrivas med olika mätresultat beroende av vilken mätenhet som användes. Eleverna gavs möjlighet att reflektera över mätenhetens betydelse genom att skriftligt svara på frågorna: ”Vad visar talen på tallinjen?” och ”Hur kan samma stav representeras av olika tal på tallinjerna?”. Elevernas arbetade med uppgifterna syns i bild 3 nedan.

Bild 3: Elevarbete ur kartläggningslektionen.

Arbetspasset avslutades med att eleverna skulle konstruera egna uppgifter. Alla elever konstruerade minst en uppgift som de inte kunde redovisa ett mätresultat av, eftersom resultatet inte kunde anges som ett heltal. En analys av hur eleverna hanterade mätresultat för dessa egenkonstruerade uppgifter, utgjorde en del av kartläggningsarbetet inför undervisningen i forskningslektionerna.

Analysen av kartläggningslektionerna är gjord i relation till elevers frågor och kommentarer om mätresultaten för jämförelserna i de uppgifter eleverna konstruerade själva. Elevers frågor och kommentarer har samlats som utsagor ur lektionerna, och kategoriserats i tre olika kategorier, se följande tabell.

Tabell 4. Kategorier gällande hur elever löste de egenkonstruerade uppgifterna

Kategori	Exempel på utsagor
Eleverna formulerar svårigheter.	Det här går ju inte. Ni måste lära oss något mer. Hur ska vi kunna mäta den här mätningen? Hur kan man skriva svaret? Det går ju liksom lite till.
Eleverna ger förslag på lösningar.	Vi kan rita. Vi kan använda de vita. Vi kan mäta på något annat sätt. Jag räknade bara ut de hela. Letade mätningar som gav bara hela i svaret. Markerat på tallinjen men vet inte hur jag ska skriva. Negativa minus är ett streck mellan alla tal.
Eleverna anger närmevärde.	2 och lite mer. 2 respektive 4 och en halv. Det går lite mer än en och en halv. Den tredje får inte plats. Mellan 2 och 3. Det får plats 2 svarta och en liten vit Borde vara närmare 3.

I samtliga lektioner finns utsagor ur alla tre kategorier. Här nedan diskuteras de tre olika kategorierna.

Eleverna formulerar svårigheter

I kategorin svårigheter formuleras finns bland annat elevkommentaren ”Ni måste lära oss något mer” där eleverna med ”ni” syftade på oss lärare. Det uttalandet tolkade lärararbetslaget som att eleverna efterfrågade ett nytt kunnande för att lösa den uppgift de blivit tilldelade. Eleverna säger att de behöver kunna något de ännu inte kan. Eleverna ser svårigheten i själva mätningen. De menar att det blir omöjligt att redovisa ett resultat av mätningen. Mätningen går ju inte jämt upp, det går inte att genomföra mätningen. Det är inte någon av eleverna som föreslår att ange ett mätresultat med ett rationellt tal.

Eleverna ger förslag på lösningar
I kategorin för elevers olika förslag på lösningar finns exempel på hur problemen eleverna konstruerade kunde lösas. De lösningar som eleverna föreslog behövde diskuteras i forskningslektionerna. För det första behövde förutsättningarna i uppgifterna förklaras. I uppgifterna får eleverna exempelvis bara använda en mätenhet. För det andra behövde eleverna få diskutera hur generella elevernas lösningar var. Hur kan vi försäkra oss om att alla tolkar våra mätresultat på samma sätt om vi exempelvis ritar av mätningen och använder avbildningen som en lösning? För det tredje har vi inte mandat att göra om uppgiften till att ange resultatet i en annan mätenhet eller att göra en helt annan uppgift.

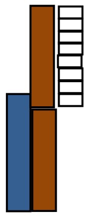
Eleverna anger närmevärde
Svaren i nästa kategori, där elevernas förslag på närmevärden istället för ett exakt mätresultat har samlats, gav oss en indikation om att vi även behöver klargöra att närmevärden inte är acceptabla i uppgiften. Det är till och med ett kriterium i själva uppgiften att mätresultatet ska anges med ett exakt mätresultat i den i uppgiften angivna mätenheten. Detta är viktigt eftersom en egenskap för rationella tal är att de anger ett mer exakt värde än de hela talen. Mätresultatet beror av den mätenhet som resultatet ska anges i.

Sammanfattningsvis konstaterade lärargruppen att eleverna inte kommenterade det mätresultat de förväntades redovisa för de egenkonstruerade uppgifterna. Eleverna tolkade bara själva mätningen. Vi konstaterade därför, inför samtliga forskningslektioner, att problemet att ange ett mätresultat behövde diskuteras med eleverna.

5.5.3 Kartläggning efter forskningslektionerna

Kartläggningen av elevernas förståelse av rationella tal som tal efter forskningslektionerna utgjordes av analyser av elevernas arbetsuppgifter från lektionerna, en arbetsuppgift eleverna skulle genomföra efter dessa lektioner, samt samma skriftliga uppgifter som genomfördes före lektionerna. Uppgiften som eleverna skulle genomföra efter lektionen visas här nedan.

Uppgift att lösa efter forskningslektionerna.



Hur många bruna får plats i en blå?
Hur kan man redovisa svaret på följande mätning?

Skriv svaret på mätningen:

Markera svaret på tallinjen:

Resultat

Resultatet av de analyser som genomfördes av elevernas arbeten i forskningslektionerna visas här i två tabeller. Först redovisas learning study ett, därefter learning study två.

Tabell 5. Kartläggning elevers arbete i learning study 1.

Lektion nr	Uppgiften efter forskningslektionerna
1	Eleverna noterade bara numeriska resultat. Alla elever noterade mätresultaten på tallinjen korrekt.
2	Eleverna noterade numeriska resultat. Alla elever noterade mätresultaten på tallinjen korrekt.
3	Samtliga elever ersatte de algebraiska symbolerna med numeriska värden i sina mätningar. Eleverna noterade *inte* mätresultaten på tallinjen.

Det var i lektion 2 som algebraiska symboler användes av läraren för första gången. Eleverna använde inte dessa symboler i sina arbeten. I lektion 3 skrev eleverna upp numeriska värdena för de symboler som användes. Eleverna använde de symbolerna som fanns i arbetshäftet. Ett exempel på en elevlösning visas i bild 7 (sid 88).

Tabell 6. Kartläggning elevers arbete learning study 2.

Lektion nr	Uppgiften efter forskningslektionerna
4	Rätt: 8/17 elever svarade blå=1brun+1/8 brun Fel: 9/17 elever 4/17 svarade: blå=1 brun+8/1 brun 2/17 svarade: blå=2 brun+1/8 brun 3/17 svarade: blå=1brun+en halv (1/8) Markerat rätt på tallinjen: 0 elever
5	Rätt: 9/13 elever blå=1brun+1/8 brun Fel: 4/13 elever 1/13 svarade med beskrivande text hur lösningen gått till 1/13 svarade blå=en brun+en vit 1/13 svarade blå=1brun+en halv=1/8 1/13 svarade blå=2H+2/8bruna Markerat rätt på tallinjen: 13 elever

I både lektion 4 och 5 noterade eleverna hela modellen för tal i bråkform. Det var dock färre elever som lyckades ange ett korrekt mätresultat i den enskilda uppgiften efter forskningslektionen fyra än efter forskningslektion fem. I lektion nummer 4 lyckades 8 av 17 elever ange rätt mätresultat, vilket motsvarade knappt hälften av eleverna och i lektion nummer 5 lyckades 9 av 13 elever, vilket motsvarade knappt 3/4 av eleverna, att ange rätt mätresultat. Samtliga elever i learning study två använde modellen med de algebraiska symbolerna för att visa hur mätresultatet skulle anges. I lektion fyra använde inte eleverna tallinjen, medan samtliga elever i lektion fem använde både de algebraiska symbolerna och tallinjen.

5.6 Analysprocessen

Analysarbetet inleddes med analyser av film och ljudupptagningar under lärargruppens pågående learning studyarbete. Vi diskuterade det kunskapsmässiga innehållet i de olika lektionerna och hur lektionerna skulle revideras för att detta innehåll skulle göras än mer synligt för eleverna. Avsnitt ur lektionerna som lärargrupen bedömde intressanta, utifrån vår gemensamma förståelse av rationella tal och tanken om en lärandeverksamhet analyserades vidare. Dessa avsnitt transkriberades med hjälp av dataprogrammet InqScribe (se www.inqscribe.com). Avsnitten som transkriberades återfinns i lektionerna där läraren har genomgång eller diskuterar med eleverna. Det finns även avsnitt där elever diskuterade med varandra då de arbetade med att lösa olika uppgifter. Det finns sammanlagt ca 25 timmar transkriberat material.

Nästa steg i analysarbetet utgjordes av en fördjupad analys av lektionerna utifrån uppsatsens tre frågeställningar. Den första frågeställningen, gällande vad som framstår som möjligheter respektive hinder för en algebraisk lärandeverksamhet analyserades med analysfrågor inspirerade av Eriksson, Orlander och Jedemark (2005) samt Roth och Radford (2011). Exempel på analysfrågor för denna frågeställning var ”Vad ska åstadkommas?”, ” Vad erbjöds eleverna?” samt ”Hur togs elevernas lösningsförslag emot i lektionerna?”. Frågorna var olika ställda beroende på vilken sekvens av lektionerna som analyserades, och samtliga frågor fokuserade möjligheter respektive hinder för en lärandeverksamhet. De exakta analysfrågorna och resultatet av dessa redovisas tillsammans med presentationen av det iterativa learning study-arbetet. Den andra frågeställningen besvarades med hjälp av analysfrågan vilket kunnande och vilket kunskapsinnehåll som synliggjordes av lärare och elever i lektionerna. Den tredje frågeställningen besvarades med hjälp av analysfrågan vad som utgjorde möjligheter eller till och med nödvändigheter för att utveckla en lärandeverksamhet för rationella tal.

6. ANALYSRESULTAT

> "… in performing […] activity, school children realize thinking actions that are adequate to the actions by which these products of spiritual culture developed historically." (Davydov, 2008, p. 121)

I föreliggande kapitlet redovisas resultatet av uppsatsarbetets tre frågeställningar. Resultatet bygger dels på lärargruppens iterativa arbete och dels på den analys av forskningslektionerna som är gjord efter avslutat learning study-projekt. I avsnitt 6.1 besvaras första frågeställningen gällande möjligheter och hinder för den framväxande lärandeverksamheten, därefter besvaras i avsnitt 6.2 vilket kunnande som synliggörs i relation till olika redskapsmedierande handlingar och i sista avsnittet 6.3 besvaras frågeställningen om villkor för mediering.

6.1 Den framväxande lärandeverksamheten

I följande avsnitt redovisas design, analys och revideringar av forskningslektionerna i de två iterativa learning study-projekten. Redovisningen är strukturerad i lektionssekvenser enligt Davydovs (2008) och Zuckermans (2004) modell för lärandehandlingar i en lärandeverksamhet (se sid 40 respektive 46). I inledningen till respektive lektionssekvens presenteras dels syftet med sekvensen, och dels, i de sekvenserer där interventioner är planerade, en tabell som kortfattat beskriver den iterativa processen. I inledningen presenteras även den analysfråga som besvaras av den fördjupade analysen. Därefter finns beskrivningar från lektionerna och lärargruppens analyser. I slutet av varje avsnitt återfinns en kortfattad fördjupad analys där resultatet av den specifika analysfrågan presenteras gällande möjligheter och hinder för utvecklingen av en algebraisk lärandeverksamhet i relation till respektive lektionssekvens. Den fördjupade analysen fortsätter i avsnitt 6.2 och 6.3.

6.1.1 Problemidentifiering

Syftet med den första sekvensen i samtliga forskningslektioner var att läraren och eleverna tillsammans skulle identifiera problemet i uppgifterna, eftersom problemet i en uppgift utgör en grundförutsättning för att uppgiften ska få funktionen av en lärandeuppgift. Problemet i samtliga uppgifter bestod i att hitta en lösning för att hantera ett mätresultat då mätenheten inte gick ett helt antal gånger i staven som skulle mätas. Första uppgiften som skulle lösas var som tidigare beskrivits att den svarta staven skulle jämföras med ett antal röda stavar. Den fördjupade analysen besvarar frågan vad som utgjorde möjligheter eller hinder för eleverna att identifiera problemet i uppgifterna.

Det iterativa learning studyarbetet.
Hur problemidentifieringen gestaltades i den iterativa processen redovisas kortfattat i tabell 7.

Tabell 7. Den iterativa processen hur problemet identifierades i de olika lektionerna.

Lektion	**Hur problemet i uppgiften gestaltades**	**Revideringar**
1	Läraren beskrev uppgiften och förklarade hur mätningen skulle gå till och hur ett mätresultat kunde anges.	Formulera vad som var svårigheten med mätningarna i forskningslektionerna.
2	Läraren beskrev uppgiften. Mätningarna presenterades som att de innehöll samma svårigheter som mätningarna i kartläggningslektionen.	Problemet hur ett mätresultat kunde anges som heltal i kartläggningslektionen och hur mätresultatet var tvunget att anges som ett rationellt tal i forskningslektionen måste explicit formuleras.
3	Problemet med uppgifterna formulerades av läraren och en elev. Svårigheter med de jämförelserna i kartläggningslektionen fokuserades istället för att identifiera problemet till hur mätresultatet skulle noteras.	Problemet måste fokusera hur ett mätresultat kan noteras utifrån de mätningar som genomförs.
4	Problemet bestod i att *eleverna* inte kunde genomföra de egenkonstruerade mätningarna.	Problemet måste fokusera rationella tal som tal, och redskap behövdes för att förklara dessa tal.
5	Problemet bestod i hur ett och samma rationella tal kunde synliggöras på en tallinje, i en mätning och i en generell modell.	*Fortsatt forskning: Hur väl kan problemet formuleras?*

Problemidentifieringen utvecklades från att endast utgöras av en lärarinstruktion i lektion 1 till att i lektion 3 identifieras som svårigheter i jämförelserna med cuisenairestavarna och att i lektion 5 formuleras som olika svårigheter i jämförelserna på tallinjen, jämförelserna och i den generella modellen för rationella tal (se tabellen ovan). I det följande finns beskrivningar av lektionerna och resultat av lärargruppens analys i den iterativa processen.

I lektionerna 1 och 2 blev eleverna instruerade om hur uppgifterna skulle genomföras. Ett exempel visas i excerpt 1 nedan. Läraren står vid tavlan och eleverna har precis samlats vid sina arbetsplatser. Uppgift 1 visas på tavlan via en dataprojektor.

Läraren:	Uppgiften ni har nu är att mäta en svart stav med bara röda stavar. Kommer ni ihåg hur vi mätte en stav med andra stavar? Är det någon som kommer ihåg det?
Flera elever:	Jag kommer ihåg
Läraren:	Det ska vi fortsätta med idag. Det är eran uppgift. Hur många röda stavar får det plats i den svarta? Och man får bara använda röda stavar. Ingen annan färg. Ni ska lägga dom röda bredvid den svarta sen skriva hur många som får plats. Förstår ni?

Excerpt 1.

I lärargruppens analysarbete blev det tydligt att läraren gav instruktioner om hur uppgifterna skulle lösas istället för att formulera problemet med att representera ett mätresultat, se rad 5-8. i excerpt 1. Lärargruppen diskuterade hur eleverna kunde stöttas i att formulera skillnaderna på mätresultaten i kartläggningslektionen och i forskningslektionerna. Det beslutades att första uppgiften skulle finnas på tavlan från början av lektionen. Vidare skulle inledningen av lektionen förändras så att läraren frågade vad eleverna kommer ihåg av uppgifterna i kartläggningslektionen till skillnad från de två första lektionerna då läraren instruerade hur uppgiften skulle lösas.

Lektion 3 började med at lärare och elever diskuterade de uppgifter eleverna konstruerat i kartläggningslektionen. En elev, som kallas Aya i den här uppsatsen, gav exempel på en uppgift hon konstruerat där en blå stav inte kunde mätas med röda stavar. Den uppgiften blev därefter utgångspunkt för en gemensam första jämförelse, se excerpt 2 nedan. Eleverna sitter på sina platser. Läraren står vid tavlan. På tavlan finns en svart stav med röda stavar bredvid.

Aya:	Om man ...vad heter det... man kunde typ ta en stav som var lång och sen… tre styckna röda säger vi... öhhmm...
Läraren:	Och då skulle man kolla hur många sådana det fanns i.
Aya:	Eller hur många det behövdes för att man skulle kunna fylla på för den blå.

[Läraren sätter upp en blå stav på tavlan med häftmassa.]

Excerpt 2.

Aya formulerade (rad 1-2 och 5-6) hur hon genomfört jämförelsen och hur hon ställde frågor för att hitta svaret på jämförelsen. I lärargruppens analys gjordes tolkningen att när läraren och eleverna diskuterade Ayas egenkonstruerade uppgift från den tidigare kartläggningslektionen ville hela elevgruppen hjälpa Aya att lösa uppgiften. Ayas formulering ”hur många det behövs för att man skulle kunna fylla på för den blå” utgjorde problemformuleringen för hur jämförelsen av de blå och röda stavarna skulle göras. Utmaningen i uppgifterna som egentligen även innefattade hur ett mätresultat kan representeras som ett rationellt tal synliggörs inte som ett problem för eleverna att lösa. Den revidering som uppfattades nödvändig inför nästa learning study och lektion 4 var att problemet skulle utgå från någon elevs erfarenhet, och formuleras av en elev, samt innehålla problemet att ange ett rationellt tal. Problemidentifieringen skulle alltså utökas i nästa lektion och fokusera både jämförelsen och mätresultatet.

I lektion 4, första lektionen i learning study 2, fanns uppgift nummer ett på tavlan redan då lektionen startade. Lärargruppens analys av lektionen visade att problemet i uppgiften formulerades som att det var eleverna som inte kunde genomföra jämförelserna i uppgifterna de själva konstruerat. Problemet i att ange mätresultatet diskuterades inte. En revidering som ansågs nödvändig inför problemidentifieringen i lektion 5 gällde därför utmaningen i att ange ett mätresultat i form av ett rationellt tal. Mätresultatet behövde gestaltas på flera sätt än enbart med en mätning. Därför beslutades att tallinjen och algebraiska symboler skulle etableras redan i diskussionen om problemet i nästkommande lektion.

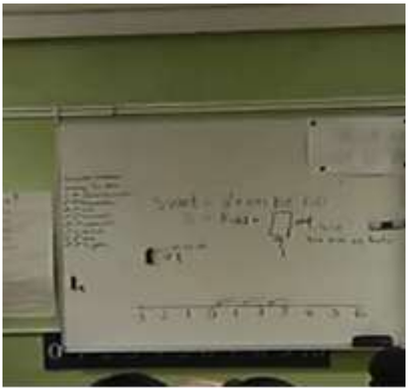
Den sista lektionen, lektion 5, startade med att den första uppgiften fanns på tavlan åskådliggjord av cuisenairestavar. På tavlan fanns även en tallinje ritad. Att detta skulle finnas på tavlan var grundat i de revideringar som gjorts av tidigare lektioner. Läraren pekade på stavarna och på tallinjen, och frågade flera gånger ”Vad är problemet?”

1.	Läraren:	Men sen....var det bara att mäta? Hur fungerade
2.		det? Är det någon som kommer ihåg bekymret? Vad är problemet?
3.	Dana:	Det är lite för mycket.
4.	Läraren:	Vad var problemet? Vad sa hon?

Excerpt 3.

Dana ger en förklaring på rad 3 hur jämförelsen mellan de olika stavarna ser ut. Hon uttryckte ”det är lite för mycket” som svar på lärarens fråga.

Problemet fortsatte att identifieras genom att läraren även tog bruk av tallinjen och algebraiska symboler för att åskådliggöra skillnaden mellan dessa uppgifter och uppgifterna i kartläggningslektionen. För att diskutera hur ett mätresultat kunde representeras påbörjades utvecklingen av en modell för ett rationellt tal, se bild 4a och b.



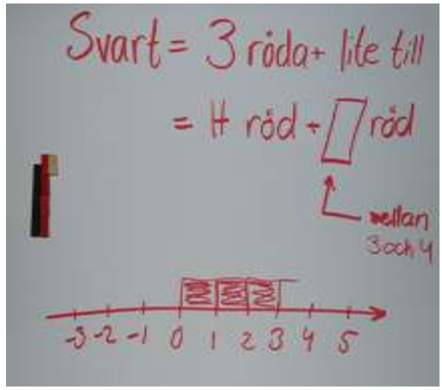


Bild 4a: *Bild 4b:*

Bild 4a: Problemet i uppgiften synliggjordes i jämförelserna av längder, på en tallinje och i ett embryo till en modell för ett rationellt tal (S = H röd +□röd).
Bild 4b: Förtydligande av lärarens anteckningar på tavlan.

I lärargruppens analys blev det tydligt hur problemet identifierades genom att läraren och eleverna pekade på tallinjen, på cuisenairestavarna och i den påbörjade modellen redan då de tillsammans identifierade problemet. Med stöd av dessa redskap uttryckte Bayar, på rad 1 i nedanstående excerpt, ett dilemma i uppgiften, och Dana gav ett förslag på hur uppgiften skulle kunna lösas på rad 9-10. Läraren stod vid tavlan och pekade växelvis på mätningen och växelvis på tallinjen.

1. Bayar: Det är tre och en halva. Det är tre stycken såna dära [pekar
2. mot mätningen som finns tavlan] och sen var det en röd som var
3. längre. Sen om du skulle lägga till svarta så skulle det vara
4. längre än en svart. Men om man la halva skulle man vara lika.

5. Läraren: Men... en liten bit till, hur vet vi att det är en halv? Vet vi
6. att det verkligen är en halv?

[Läraren pekar på den röda enheten som utgör ’en liten bit till’ och på tallinjen mellan tre och fyra.]

7. Chaid: Jaaa, det vet vi väl?

8. Läraren: Finns det något sätt, vad gör vi för att veta?

9. Dana: Vi kan kanske mäta? Vi måste väl mäta den röda, och ”den
10. lilla biten” som är kvar.

Excerpt 4.

Sammanfattningsvis visade lärargruppens analyser av den här lektionssekvensen att eleverna behövde guidas i att formulera problemet i uppgifterna. Guidningen utgjordes av att lärare och elever identifierade problemet tillsammans både vid tillfällen då en elev tog initiativet och när läraren frågade efter problemet. Problemet identifierades till att bestå i att jämföra olika längder där mätresultatet för dessa jämförelser inte kunde redovisas med endast heltal, problemet med att ange ett mätresultat för dessa jämförelser samt problemet att förstå mätresultatet som en exakt kvantitet mellan två hela tal.

En fördjupad analys

Den fördjupade analysen visar vad som utgör möjligheter för att identifiera problemet i uppgiften men analysen visar också exempel på vad som kan utgöra hinder för eleverna att identifiera problemet.

Analysen visar att möjligheten att identifiera problemet påverkas av hur guidningen tar form då uppgifterna presenteras och gestaltas. Att explicit formulera problemet möjliggörs bland annat av att läraren frågar efter problemet vid flera tillfällen i lösandet av uppgifterna, exempelvis som i excerpt 3 och 4. Problemidentifieringen möjliggörs även av att algebraiska symboler, en påbörjad modell, cuisenairestavarna, samt tallinjen tas i bruk som medierande redskap (se bild 4). Analysen visar alltså att flera olika redskapsmedierande handlingar krävs för att eleverna ska formulera problemet och ta sig an att utforska rationella tal.

En analys av några elevers uttalanden i kartläggningslektionerna, då de ska ange ett mätresultat för en mätning och säger ”det här går ju inte”, och ”ni måste lära oss något mer” (se avsnitt 5.5.2) kan tolkas som att eleverna framför en önskan om att få ta del av nytt kunnande. Uppgifterna med längdjämförelser som inte ”går jämt ut” tolkades utgöra motiv för att utforska andra tal än de hela talen.

Analysen visar att när introduktionen av uppgifterna sker med instruktioner från läraren, som i excerpt 1, utan att problemet identifieras tillsammans med eleverna, utmanas inte eleverna att utforska rationella tal. Eleverna diskuterar inte de rationella talen utan enbart att de ska läsa texten och lägga stavar bredvid varandra. Eleverna tar inte bruk av några medierande redskap i dessa diskussioner och inte heller i lösningarna av uppgifterna (se avsnitt 6.1.5). Några lärandehandlingar gestaltas inte och någon lärandeverksamhet rörande rationella tal utvecklas inte, eftersom eleverna inte diskuterar det kunskapsinnehåll som fokuseras. Lärarinstruktionerna kan ses som undervisningshandlingar utan koppling till några lärandehandlingar för eleverna. Lärarinstruktionerna ser således ut att hindra att en lärandeverksamhet tar form.

6.1.2 Redskapsetablering

Andra sekvensen i forskningslektionerna syftade till att etablera ämnesspecifika redskap som stöd för att mediera rationella tal som tal. Den fördjupade analysen redovisas sist i avsnittet och fortsätter i avsnittet 6.2 om kunnande i relation till olika redskapsmedierade handlingar.

Den fördjupade analysen som finns i detta avsnitt besvarar frågan vilka möjligheter respektive hinder redskapsutvecklingen hade för utvecklingen av en lärandeverksamhet.

Det iterativa learning studyarbetet.
De redskap som togs i bruk i olika lektioner, underlagen för revideringar, samt de revideringar som lärargruppen beslutade finns redovisade i tabell 8. Efter tabellen finns beskrivningar av lektionerna, lärarnas analyser och revideringar i det iterativa arbetet.

Tabell 8: Sammanfattning av hur olika redskap togs i bruk

Lektion	Hur olika medierande redskap etableras	Underlag för revidering	Revideringar
1	Instruktioner från läraren hur uppgiften ska lösas. Utifrån elevernas arbetshäften etablerades benämningen ’lite till’	En elev mäter med linjal, och flera elever valde andra enheter för att underlätta att ange ett mätresultat.	Mätenheten får inte förändras. Tallinjen måste etableras tidigt i lektionen. Algebraiska symboler bör provas.
2	Ett konkret mätresultat $s = 3\ 1/2\ r$ ersattes med algebraiska symboler av läraren.	Ingen av eleverna använde de algebraiska symbolerna i sina arbetsuppgifter.	Innebörden i olika symbolers placeringar i en generell modell behöver diskuteras. Tallinjen måste etableras tidigt i lektionen.
3	Algebraiska symboler erhöll semantiska innebörder för olika placeringar i en modell för tal i bråkform. Uttrycket för tal i bråkform blev att behandlas som en formel.	De symboler som etablerades av eleverna ersattes av symboler som fanns i arbetshäftet. Tallinjen får eleverna upptäcka själva.	Algebraiska symboler som elever valt ska prioriteras. Operationer med en formel ska ersättas med diskussioner om en modell. Tallinjen måste etableras tidigt i lektionen.
4	Läraren ritade cuisenairestavarna vid tallinjen. En observatör föreslog att mätenheten skulle mätas.	Tallinjen användes inte av eleverna i deras arbeten.	Jämförelser av längder, tallinje och algebraiska symboler behöver etableras tidigt i lektionen för att utforska rationella tal som tal.
5	’En liten bit till’ Jämförelse av stavlängder kopplad till tallinjen och till en modell med algebraiska symboler. Avstånden eller mellanrummen mellan de hela talen på tallinjen.	Hur benämner vi de rationella talen mellan de hela talen?	

Det var samma redskap som togs i bruk i de olika lektionerna. Det som förändrades i det iterativa arbetet och utgjorde interventionerna mellan lektionerna var *hur* redskapen togs i bruk.

I lektion 1 använde läraren ’lite till’ för att beskriva den rationella delen av mätresultatet utifrån att frågan ”varför blir det lite till” fanns i elevernas arbetshäften. I lärargruppens analys av arbetet blev det synligt att det uttrycket även togs i bruk av flera elever för att förklara olika mätningar.

Citat hämtade från olika tillfällen i den här lektionen utgör tillsammans excerpt 5. I arbetet med uppgift 1 sa Emil, en av eleverna, följande:

Emil: För att en halv är lite till än tre. Tre och en halv är lite längre än tre. Om det hade varit bara vanligt så hade det inte varit lite till.

Excerpt 5a

I uppgift 1 mätte några elever stavarna med linjal istället för att jämföra olika längder.

Fredrik: Den här är två centimeter och den svarta är sju centimeter.

Excerpt 5b

Fredriks mätning med linjal gav upphov till en diskussion om att uppgiften var att jämföra olika stavar. Några elever tyckte att vi kunde använda flera enheter att jämföra med för att slippa problemet med att ange mätresultatet i form av ett rationellt tal.

Emil: Man kan ju ta en röd och en vit, då behöver man inte krångla så där.

Excerpt 5c

I uppgift 2 förklarade Amii att det behövdes ’en liten bit till’ av mätenheten utöver de hela mätenheterna för att ange ett mätresultat. Hon använde uttrycket ’lite till’ för att förklara vad som utgjorde tredjedelen.

Amii: Men jag tänker att det är de hela två gröna och av den som det bara är lite till av är det en tredjedel.

Excerpt 5d

Mätenheten utgjorde en förutsättning för problemet liksom jämförelsen mellan olika stavar. I revideringen inför nästkommande lektion såg lärargruppen att det var nödvändigt att förtydliga att mätenheten inte fick förändras och att någon form av algebraiska symboler borde provas.

I lektion 2 gav eleverna numeriska förslag på hur många röda stavar som fick plats i en svart stav. Ett mätresultat som läraren noterade på tavlan, 3 1/2, utvecklades till s = 3 1/2 genom att läraren förklarade för eleverna att s är den svarta staven. En elev föreslog då r för den röda mätenheten. Utifrån noteringen, $s = 3\ 1/2\ r$, försökte läraren få igång en diskussion om vilka algebraiska symboler som skulle kunna ersätta de numeriska värdena i mätresultatet. I lärargruppens analys blev det synligt att de symboler som föreslogs av läraren inte togs i bruk av eleverna. Eleverna angav endast numeriska mätresultat (se avsnitt 5.5.3)

I lektion 3 utgick arbetet från en uppgift som en av eleverna, Aya, hade haft bekymmer med i kartläggningslektionen. Läraren och eleverna ersatte de numeriska värdena för mätresultatet i hennes uppgift med algebraiska symboler. Hur de algebraiska symbolerna utvecklades syns i följande excerpt, där heltalsdelen av modellen utvecklades.

1.	Läraren:	Perfekt... Dom är hela. Dom är fyra hela.
2.		Det är det som är skillnaden. Vad kan vi kalla den här? Kan
3.		vi sätta en bokstav för den här? Kan ni komma på någon bokstav
4.		bara?
5.	Fahrad:	*H*
6.	Läraren:	*H.* Då kan vi göra *H* för hela.

Excerpt 6.

Inför den här lektionen hade lärargruppen bestämt att algebraiska symboler skulle användas. Men hur skulle de introduceras? I lektionen blev det till slut att läraren frågade efter en bokstav, se rad 3 i excerptet ovan. Lärargruppens analys visade att eleverna valde symboler utifrån första bokstaven i innebörden av symbolens placering i den modell som utvecklades. Hur andra symboler utvecklades i lektionen redovisas i excerpt 12 (sid 82). I den här lektionen blev de algebraiska symbolerna som eleverna föreslog dock utbytta mot symboler som fanns i elevernas arbetshäften, se avsnitt 6.1.4 där modellutvecklingen redovisas samt 6.1.5 där redovisningen för hur eleverna provar modellen finns. Lärargruppen tolkade detta byte av symboler som en anledning till att diskussionen om innebörden i symbolernas placeringar i modellen avslutades. Revideringen inför nästkommande lektion blev därför att de symboler som utvecklats med elevers medverkan måste behållas.

I lektion 4 presenterades de jämförelser eleverna genomförde med cuisenairestavarna som en likhet ”*svart = X +*”. Likheten blev i fokus genom en fråga från läraren till eleverna om de visste vad likhetstecknet betyder. Läraren försökte därefter etablera uttrycket ’en bit’, för att ange bråkdelen i modellen, men varken likheten eller uttrycket ’en bit’ togs i bruk av eleverna. Läraren jämförde cuisenairestavarna mot en tallinje i den andra uppgiften där mätresultatet blev 2 1/3. Hur detta såg ut blir synligt till höger i bild 5.

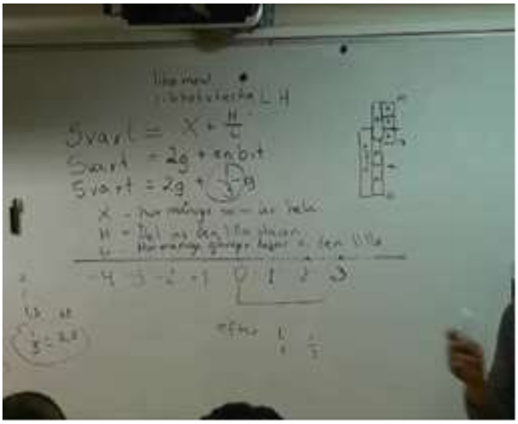


Bild 5: Tavlan efter en gemensam diskussion om ett mätresultat.

I en diskussion där det empiriska mätresultatet 1/3 ersattes av algebraiska symboler gav läraren förslaget *H* i täljaren och eleverna föreslog *L* i nämnaren. Dessa symboler användes av läraren, men inte av eleverna. I analysen av lektionen gjorde lärargruppen därför tolkningen att det redskap som eleverna såg ut att ha mest användning av i den här lektionen var jämförelserna med cuisenairestavarna. En revidering till nästkommande lektion som lärargruppen beslutade om var att redskapen i form av tallinjen och de algebraiska symbolerna måste tas i bruk tidigare i lektionen för att utvecklas som redskap för att utforska rationella tal.

I den sista lektionen, lektion 5, markerade den algebraiska symbolen *”H”* de *hela* mätenheterna i jämförelserna mellan olika långa cuisenairestavar och på tallinjen. Mätresultatet åskådliggjordes på tallinjen genom att läraren pekade på tallinjen hur den svarta staven räckte längre än till heltalet tre men inte ända fram till heltalet fyra. Vid trean diskuterade läraren och klassen återigen problemet med mätresultatet i uppgiften. Uttrycket ’en liten bit till’ användes för att ta reda på hur stor del av mätenheten som utgjorde bråkdelen av mätresultatet, vilket visas i excerpt 7: Läraren plockade fram de minsta vita stavarna för att mäta en röd stav. Läraren satte upp två vita stavar på tavlan bredvid den röda och höll sedan handen i mätningen där den svarta staven slutar.

1.	Läraren:	Hur mycket behöver vi av den röda? Hur
2.		många vita går på den där ’en liten bit’? Hur
3.		många vita går åt för att fylla ut den där svarta?
4.	Många elever:	En.
5.	Läraren:	Hur många är de sammanlagt? En av hur många?
6.		Hur många vita finns på hela röda?

7. Många elever: Två.

[Läraren pekar på fyrkanten i *S = H röd +□ röd* som finns skrivet på tavlan.]

8. Läraren: Hur ska vi skriva här då?

[Evin räcker upp handen och blir ombedd att skriva bråkdelen på tavlan. Evin skriver: *S = H röd + 1 vit/2 vita röd*..]

[Läraren skriver: *Svart = 3 röda + 1/2 röda*.]

Excerpt 7.

Av Evins exempel, med både generella symboler (*”vit /vita”*) och numeriska sifferexempel (1/2), valde läraren att använda sifferexemplet och redovisa ett mätresultat istället för att fortsätta utveckla en generell modell. Bråkdelen av mätresultatet gestaltade alltså eleven med generella symboler medan läraren valde numeriska siffror.

Sammanfattningsvis visade lärargruppens analyser att redskapen behövde introduceras tidigt i lektionen, redan då problemet i uppgifterna formulerades, för att redskapen skulle mediera rationella tal. Redskapen som togs i bruk utgjordes av cuisenairestavar för jämförelser av längder, algebraiska och numeriska symboler, tallinjen, samt språkliga benämningar såsom ’en liten bit till’. Modellen för rationella tal togs i bruk som redskap efter att den utvecklats i flera steg.

En fördjupad analys

Redovisningen av den här fördjupade analysen kompletteras av avsnittet 6.2 som redovisar vilket kunnande som synliggörs i relation till olika redskapsmedierande handlingar. I relation till de medierande redskapen som tas i bruk visar den fördjupade analysen endast möjligheter för att en lärandeverksamhet ska utvecklas. Utvecklandet av en algebraisk lärandeverksamhet förutsatte dock att ett flertal medierande redskap togs i bruk. Analysen visar också att det främst är de algebraiska symbolerna, exempelvis *h* för *hela* respektive *d* för *delen* och *v* för *vita* i modellen *Svart = h + (d/v)*, som utgör stöd för eleverna att utforska de rationella talen. Detta grundas i skillnaden mellan hur eleverna lyckades lösa de skriftliga uppgifterna i kartläggningsarbetet före forskningslektionerna (se avsnitt 5.5.1) och hur väl de lyckades lösa motsvarande uppgifter efter de olika forskningslektionerna (se avsnitt 5.5.3) samt hur modellerna tagits i bruk (se avsnitt 6.1.5). De algebraiska symbolerna tar form som medierande redskap då olika placeringar av symbolerna diskuteras i utvecklingen av modellen, se excerpt 6 och excerpt 7. I modellen utgör den algebraiska symbolen *h*, möjlighet för mediering av den hela delen i mätresultatet som visas i excerpt

6 och *d* respektive *v* för mediering av innebörden i täljare respektive nämnare som visas i excerpt 11 (sid 80). Utifrån ovanstående och utifrån den tavelbild som avbildas i figur 11 (sid 86) gör jag tolkningen att abstrakta algebraiska symboler kunde utgöra stöd för att diskutera den teoretiska strukturen av rationella tal. Även excerpten 15 (sid 83) där den generella modellen preciserades med symbolen *g* för mätenheten, och excerpt 16 (sid 86) där bråkdelen utvecklas, visar hur algebraiska symboler kan mediera rationella tal. Eftersom de algebraiska symbolerna hade möjlighet att ta form som medierande redskap och eleverna därför kunde diskutera teoretiska strukturer i rationella tal, kunde en algebraisk lärandeverksamhet utvecklas.

Inget av de redskap som togs i bruk tycktes hindra möjligheten att utveckla en algebraisk lärandeverksamhet. En tolkning i den fördjupade analysen är dock att de numeriska förslagen som i lektion ett och två var tänkta att utgöra stöd för att ange ett mätresultat inte såg ut att underlätta för eleverna att ange mätresultatet i de nästkommande uppgifterna. De numeriska förslagen verkade endast utgöra enstaka exempel på lösningar. En tolkning är därför att de numeriska förslagen inte underlättade för att utveckla en teoretisk förståelse av rationella tal. Eleverna diskuterade exempelvis inte några innebörder i hur talen representerades. Tallinjen fungerade däremot som stöd för att utforska mätresultaten genom att avstånden mellan de hela talen på tallinjen diskuterades och ifrågasattes såsom i excerpt 20 (sid 93). Jämförelserna av stavarna tolkas som medierande handlingar eftersom både lärare och elever använde jämförelserna i de situationer då en modell skulle utvecklas, se excerpt 7, där läraren pekar i mätningen och på tallinjen för att åskådliggöra modellen. Uttrycket ’en liten bit’ möjliggör mediering av bråkdelen i talen. Den fördjupade analysen visar att de elever som inte använde ’lite till’ bytte enhet i mätresultatet så resultatet kunde anges med ett heltal.

6.1.3 Lösningsförslag

Arbetet med lektionssekvensen lösningsförslag syftade till att fokusera elevernas möjligheter att diskutera olika förslag till lösningar för att representera ett mätresultat. I det följande presenteras beskrivningar av elevernas förslag som de framkom i de olika lektionerna. Någon revidering av den här lektionssekvensen i det iterativa arbetet var inte möjlig, eftersom de förslag eleverna lämnade inte kunde planeras av lärarna. Den fördjupade analysen besvarar frågorna vilka lösningsförslag som möjliggjorde en algebraisk lärandeverksamhet samt hur dessa förslag togs emot i lektionen. Resultatet av den fördjupade analysen redovisas delvis sist i detta avsnitt men finns även i avsnittet 6.2, där kunnande av rationella tal som synliggjordes i lektionerna redovisas i relation till olika redskapsmedierande handlingar.

Arbetet i learning study.
I lektion 1 erbjöds elever att ge förslag på olika numeriska mätresultat i både uppgift 1 och 2. I den första uppgiften gav många elever förslaget tre och en halv. Detta ville eleverna skriva som 3,5 eller som 3,5 där den grafiska storleken på decimalen var viktig för att visa att det värdet inte var ett heltal. I den första uppgiften gav eleverna även förslag på mätresultat i andra mätenheter än den som angetts i respektive uppgift. Eleverna ville exempelvis ange mätresultatet i cm. I uppgift två föreslog eleverna mätresultatet 2,3 och när läraren påpekade att vi var tvungna att ange resultatet som ett tal i bråkform gav eleverna förslaget 1,3. Läraren gav mätresultatet 2 1/3 se excerpt 25 (sid 99). En elev argumenterade för att bara lära sig decimalform, men ändrade sin uppfattning då resultatet med tredjedelarna behandlades.

[Läraren skriver 2 1/3 ≈ 2,3333333 på tavlan.]

1. Emil: Men det är ju fränt.
2. Fredrik: När ska man sluta skriva 3 då?
3. Läraren: Man kan visa det med tre prickar. Tre prickar i
4. matematiken betyder hur många som helst.

[Läraren skriver 2 1/3 = 2,33…]

5. Emil: Betyder allt nästan något speciellt i matte?
6. Läraren: Nästan allt har en betydelse.

Excerpt 8.

I lärargruppens analys av ovanstående gjordes tolkningen att eleverna inte kunde vare sig likheter eller skillnader mellan tal i bråkform och tal i decimalform.

I lektion 2 föreslog eleverna numeriska mätresultat som lösning på uppgifterna. Ett förslag som eleverna framförde var tre och en halv. Ett förslag som också framkom var sju. En av de andra eleverna påpekade dock att mätresultatet sju gällde för en annan mätenhet. Mätresultatet sju fick sedan inte någon mer uppmärksamhet under lektionen. Även i den här lektionen var det läraren som föreslog hur mätresultatet kunde representeras som tal i blandad bråkform. Utifrån lärarens mätresultat och på initiativ av läraren, ersattes de olika numeriska värdena i mätresultatet med algebraiska symboler. Eleverna föreslog alfabetets första bokstäver, se excerpt 9:

1. Läraren: Man kan ju skriva en bokstav eller något?
2. Ahmed: Jaa, *a*

Läraren: Och den nedanför?

Ajib: *b*

Läraren. *b*. Och då kan vi få fram en formel, där s är lika med $s = c\ a/b$

Många elever: Ahhaaa

Läraren: Vad är *c* för något?

Eva: Bokstav?

Läraren: Hela betyder det. Visst betyder det att det är tre stycken hela.

Excerpt 9.

Lärarnas analys av den här lektionen visade att eleverna såg de symboler som var tänkta som medierande redskap endast som bokstäver. Analysen grundades i att eleverna inte reflekterade över innebörden av symbolerna i modellen.

I lektion 3 kom en modell för tal i blandad bråkform att benämnas och behandlas som en ”formel”. Eleverna var delaktiga i att diskutera vilka algebraiska symboler som kunde utveckla en generell formel. Då formeln utvecklades erbjöds eleverna möjlighet att reflektera över innebörden i siffrornas olika placeringar i det numeriska mätresultatet. Vad eleverna associerade till heltalsdelen syns i följande excerpt. En mätning med Cuisenairestavar fanns på tavlan tillsammans med mätresultatet *B = 4 ½ röda*. Läraren pekade på 4:an i mätresultatet.

Läraren: Men vad betyder det här inne? Vad betyder det? När ni säger den här fyran vad betyder den?

Fahrad: Den betyder fyra.

Galina: Ental, eller någonting eller svaret eller nåt.

Läraren: Ental javisst, men hur många? Men hur många ental finns där?

Många elever: Fyra

Läraren: Fyra ental. Vad betyder dom?

Hanna: Att de är fyra plus.

Galina: Fyra

Läraren: Är det de här fyra eller är det de här?

[Läraren pekar på mätningen med stavarna].

11.	Jan:	Det betyder röda.
12.	Läraren:	Fyra röda ...som är...vaddå?
13.	Jan:	Vad är?
14.	Läraren:	Är dom fyra samma som dom här?
15.	Galina:	Nej
16. 17.	Läraren:	Vad är skillnaden mellan dom här fyra och dom andra?
18. 19.	Karin:	[Utbrister detta samtidigt som hon räcker upp handen] Dom är hela och dom andra är bara halv.
20.	Läraren:	Ja, vad sa hon?
21.	Galina:	Dom är hela.

Excerpt 10.

Eleverna gav först förslag på ental, tiotal, 4 plus och efter en lång diskussion utbrast Karin på rad 19 att fyran i mätresultatet representerade *hela* mätenheter. Därefter fortsatte diskussionen med att eleverna föreslog olika algebraiska symboler för de positioner som skulle representeras, se redovisningen av nästa sekvens 6.1.4 där modellutvecklingen redovisas.

Även i lektion 4 erbjöds eleverna att föreslå olika numeriska mätresultat. Till skillnad från inledningen av lektionen, då problemet i uppgiften diskuterades, var eleverna nu aktiva och kom med många olika förslag på numeriska mätresultat. När lektionen fortsatte med att de numeriska mätresultaten skulle utvecklas till en modell var det återigen svårare att få eleverna att ge förslag i diskussionerna, se nästkommande lektionssekvens där modellutvecklingen redovisas. När mätresultatet av den andra mätningen, som gav resultatet 2 1/3 gröna, skulle placeras på tallinjen initierade läraren en diskussion om att storleksordna 1/3 och 1/2. I diskussionen fokuserades vilket tal som var störst, vilket tal som låg före det andra på tallinjen, vilket tal 2 1/3 eller 2 1/2 som låg närmast tre samt en fråga om när man får mest, om man är två eller tre personer att dela en chokladkaka, så som visas i excerpt 26 (sid 103). Läraren initierade en förklaring som eleverna inte bjöds in att reflektera över. Diskussionen avslutades med att klassen något tveksamt enades om att en halv är större än en tredjedel.

I lektion 5 hade tallinjen, mätningen och början på en modell för rationella tal kopplats samman med algebraiska symboler. Med stöd i dessa redskap gav eleverna, vid flera olika tillfällen under lektionen, förslag på hur olika delar av modellen kunde utvecklas. I den första jämförelsen föreslog en elev *vit/vita* för bråkdelen av mätresultatet se excerpt 7 (sid 75). I den andra mätningen började eleverna ge förslag på olika numeriska mätresultat. Läraren bröt möjligheten att ge numeriska förslag. Istället föreslår läraren att bråkdelen ska anges *m/n*, och eleverna beskriver vad *m* respektive *n* symboliserade.

1.	Läraren:	Kan någon förklara vad betyder *m*?
2.	Chaid:	En del av den lilla delen.
3.	Läraren:	Precis. Och vad betyder *n*? Kan någon berätta?
4.	Evin:	Den gröna är *n* och den lilla är *m*.

Excerpt 11.

I den tredje mätningen föreslog eleverna symbolerna *d* för *delen* och *v* för *vita*, se excerpt 16 (sid 86). En diskussion om skillnaden mellan mätenheter och variabler initierades också av eleverna i utvecklingen av modellen. Mätenheterna ville eleverna skriva med hela ordet för den färg som användes medan variablerna fick ha kvar sina algebraiska symboler. När mätenheterna förändrades bytte eleverna ord för färgen men behöll symbolerna för variablerna. Mer om hur modellen utvecklades redovisas i nästkommande avsnitt, 6.1.4.

Sammanfattningsvis visade lärargruppens analyser att eleverna var aktiva och gav många förslag på numeriska lösningar.

En fördjupad analys

Den fördjupade analysen visar att beroende av hur elevlösningar tas omhand, möjliggörs respektive hindras utvecklingen av en lärandeverksamhet. Analysen visar att förslag från eleverna på algebraiskasymboler som innehåller semantiska ledtrådar till innebörderna av symbolernas placeringar i modellerna påverkar möjligheten att utveckla en lärandeverksamhet mer än andra elevförslag. Exempel på dessa förslag visas i excerpt 6 på rad 5 (sid 73) och i excerpt 16 på rad 11 (sid 86). I det senare exemplet argumenterar eleverna för sitt förslag *v* som symbol för nämnaren eftersom nämnaren utgörs av de *vita* små enheterna.

Den fördjupade analysen påvisar hinder för att utveckla en lärandeverksamhet då elevernas förslag tas emot med berömmande ord från läraren innan eleverna hinner reflektera över förslagen (se avsnitt 6.1.6 om elevreflektioner). Analysen visar även att i sekvenser där eleverna inte är aktiva i att ge förslag på lösningar gör läraren elevernas arbete vad gäller att driva utvecklingen av olika lösningsförslag. I excerpt 9 (sid 77) syns hur läraren driver diskussionen om symbolutvecklingen på rad 1, 3 och 5 och hur eleverna endast svarar på lärarens frågor.

6.1.4 Modellutveckling

Syftet med arbetet i denna lektionssekvens var att utveckla en generell modell för rationella tal tillsammans med eleverna. Den fördjupade analysen besvarade frågorna hur olika modeller möjliggjorde ett utforskande av rationella tal samt hur modellerna utvecklades och påverkade den framväxande lärandeverksamheten.

Det iterativa learning studyarbetet.
Inledningsvis finns en sammanfattning av vilka generella modeller som utvecklades i de olika lektionerna, och vilka revideringar som genomfördes i learning studyarbetet, se tabell 9.

Tabell 9. Tabellen visar vilka generella modeller som utvecklades.

	Vilka modeller utvecklades	**Revideringar till nästa lektion.**
Lektion 1		En generell modell måste utvecklas tillsammans med eleverna.
Lektion 2	*S=a b/c R*	Börja i det abstrakta och generella.
Lektion 3	*B=h d/ö r*	Börja i det abstrakta och generella. Elevernas egna symboler ska prioriteras före andra generella symboler. Modellen bör följa Davydovs generella modell för att alla tal kan delas upp i delar.
Lektion 4	*Svart=X+ H/L*	Börja i det abstrakta och generella.
Lektion 5	*S= H + m/n* *S=H + vit/vita* *S= H + d/v* *S= Hg + (d/v) g* *Svart=h gul + (d/v) gul*	*Detta upplägg borde provas igen.*

Utvecklingen av de generella modellerna beskrivs i det följande tillsammans med resultatet av några av lärargruppens analyser i den iterativa processen. Lektion 1 utvecklades inte någon modell för mätresultaten i den lektionen.

I lektion 2 utvecklades en modell för tal i blandad bråkform utifrån noteringen 3 ½ som läraren gjort på tavlan. De konkreta numeriska siffrorna ersattes på lärarens initiativ av bokstäver i syfte att de skulle ta form som algebraiska symboler. En modell utvecklades, $S = c\ a/b\ R$ (där S är den stav som mättes, c är antalet hela mätenheter, a är antalet små enheter av mätenheten som behövs i mätningen, b är totala antalen enheter mätenheten delas i och R är mätenheten). De numeriska mätresultaten användes som exempel för att utveckla en modell.

I lektion 3 skrev läraren elevernas förslag på mätresultat på tavlan. Resultatet 4 1/2 utvecklade läraren till *B = 4 1/2 röda*. Utifrån detta mätresultat initierade läraren att en ”formel” skulle utvecklas. Eleverna sa att de inte visste vad en formel var, och läraren gav ett exempel på en formel för beräkning av arean av en kvadrat. Eleverna frågade då om lektionen skulle handla om area. Eleverna var därefter delaktiga i att utveckla vilka algebraiska symboler som ”formeln” för tal i blandad bråkform skulle gestaltas med. Siffrornas blev utgångspunkt för hur en modell för ett tal i blandad bråkform kunde utvecklas. Hur det gick till när heltalsdelen i denna modell erhöll symbolen *h* redovisas i excerpt 10 (sid 79). För att sedan benämna bråkdelen föreslog eleverna återigen symbolen *h* som i halva, se excerpt 12 nedan.

1.	Läraren:	*H* för hela. Vad kan vi kalla den där? Två bokstäver
2.		behöver vi eftersom det är två.
	[Läraren pekar på täljaren och nämnaren i 1/2.]	
3.	Galina:	Halv
4.	Hanna:	*h*
5.	Läraren:	Är det halva? I det här fallet är det halva men det
6.		kunde också vara en tredjedel. Vad betyder det?
7.	Flera elever:	Del.
8.	Jan:	”*d*” som i del.
9.	Läraren:	Del kan man ta. Javisst håller ni med? Kan man ta del?
10.		Det är inte helt utan delar. Och där nere?
11.	Karin:	Ööövriga
12.	Läraren:	*Ö* är bra. *d* genom *ö*. Bra och nu. Vad ska vi
13.		skriva sen? I det här fallet? Vad är det som står här?
	[Läraren pekar efter *d/ö*.]	
14.	Jan:	*R*

Excerpt 12.

Problemet med att använda *h* för bråkdelen påtalades av läraren genom att han berättade att det inte bara finns halvor mellan de hela talen. Läraren berättade även att det bör vara olika symboler för varje placering i bråkdelen, och eleverna kom då överens om *d* för *delen* som behöver användas för att täcka den svarta staven och *ö* (*övriga*) för det totala antalet delar mätenheten skulle delas i. Den modell läraren och eleverna kom fram till var *B = h d/ö r*. Förutom *d* och *ö* symboliserade *B* staven som mättes, *h* symboliserade antalet hela mätenheter, och *r* symboliserade fortfarande mätenheten. Lärargruppens analys visade att eleverna inte helt självklart lämnade bokstävernas funktion som fonem. En diskussion uppstod om bokstäverna ska läsas som ”dör”.

1. Fredrik: Det står dör.

[Ytterligare en fråga lyftes av eleverna utifrån denna modell]

2. Galina: Men är det här matte?

3. Läraren: Ja, bra fråga. Det är just det […] det är det vi ska lära
4. oss.

Excerpt 13.

Lärargruppens analys visar att läraren argumenterade för modellen som klassen utvecklat genom att jämföra klassens modell med en modell som fanns i elevernas arbetshäften, *S = x (m/n) r*. Samtliga elever använde symbolerna i modellen från arbetshäftet i sina arbetsuppgifter. Eleverna noterade *x=1, m=1 och n=8* vilket med dessa siffror gav mätresultatet 1 1/8, se bild 7 (sid 88). Lärargruppens analys visade att elevernas egna algebraiska symboler övergavs, och detta sågs som förklaring till att diskussioner om symbolernas placeringar i modellen avslutades. I lärargruppens arbete blev en nödvändig revidering inför nästa lektion att de algebraiska symboler eleverna varit med och utvecklat skulle behållas. En tolkning av arbetet i de två sista lektionerna då modellen för tal i blandad bråkform var tänkt som en generell modell, var att den endast erbjöd begränsade möjligheter att diskutera rationella tal som tal. Modellen för tal i blandad bråkform var kompakt och det var svårt att utveckla ord som fungerade att diskutera strukturen för rationella tal. Ytterligare en revidering till nästkommande learning study blev att byta ut modellen för tal i blandad bråkform mot en generell modell för rationella tal.

I learning study två, som började med lektion 4, utvecklades istället en modell för mätresultatet utifrån den generella modellen för rationella tal. Modellen för rationella tal påbörjades med att läraren introducerade ”*svart = x +”* som en likhet, vilket tidigare beskrivits. Arbetet med algebraiska symboler avbröts och eleverna fick föreslå numeriska mätresultat istället. Det mätresultat som eleverna föreslog utgjorde sedan utgångspunkten för en diskussion där läraren hade det största engagemanget i hur bokstäver i form av algebraiska symboler kunde ersätta de numeriska värdena. I lektionen utvecklades modellen *Svart = X + H/L*, där *Svart* symboliserade den stav som blivit mätt, *X* var antalet hela mätenheter, *H* de små enheter av mätenheten som behövs för att mäta den svarta och *L* var det totala antalet enheter som mätenheten delades in i. I lärargruppens analys av lektionen blev det synligt att det var lärarens förslag på algebraiska symboler som användes, och att det var svårt att bjuda in eleverna både till att ge förslag på symboler och att reflektera över innebörden av de olika placeringarna i modellen.

I lektion 5 förändrades och utvecklades en modell stegvis genom att de olika uppgifterna diskuterades och löstes. Arbetet med den generella modellen inleddes redan i problemformuleringen. Beskrivningen som här följer visar hur denna modell förändrades och utvecklades genom hela lektionen. I problemformuleringen benämndes heltalsdelen för *H*, en symbol som blev att kvarstå genom hela lektionen.

[Tallinjen är uppritad på tavlan och där är de tre hela röda markerade. Läraren pekade på trean på tallinjen och på de tre hela röda cuisenairestavarna.]

1. Läraren: Nu måste vi hålla ordning här,

[Läraren skriver H vid de tre hela röda cuisenairestavarna.]

2. Läraren: Det här är de hela, det här är *H*. Och då känner
3. ni igen att det är de streckade.

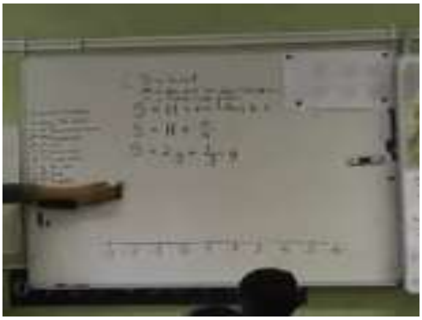
[Läraren pekar på markeringen på tallinjen].

4. Läraren: Vad är det vi håller på med?
5. Dana: Vi ska få till det svarta.

[Läraren skrev *Svart = H hela + en liten bit till*.]

Excerpt 14.

För att se hur detta såg ut på tavlan hänvisas till bild 4 (sid 68) i avsnittet om problemformulering. Därefter utvecklades bråkdelen av mätresultatet i etapper under lektionens gång. I den första jämförelsen hade en elev ett förslag på *1vit/2vita* för bråkdelen. Möjligheten att utveckla en generell modell från detta förslag gick dock förlorad då läraren valde att ange ett mätresultat som *Svart= 3 röda + 1/2 röda* istället för att utveckla en modell utifrån elevens förslag om *vit/vita,* se excerpt 7 (sid 75). I uppgift 2, då den svarta staven skulle mätas med ljusgröna stavar, utvecklades en modell för att ange mätresultatet på initiativ från läraren. Modellen blev $S = H + (m/n)$ där *H* fortfarande symboliserade hela, *m* symboliserade de små enheter av mätenheten som behövs för att mäta *S* och *n* symboliserade det totala antalet enheter som mätenheten skulle delas in i. Den här modellen var den första modellen som utvecklades som modell utan att först ange ett empiriskt mätresultat. Modellen utvecklades från det abstrakta, genom att lärare och elever diskuterade symbolernas olika placeringar i modellen. Modellen användes sedan på ett konkret exempel. I det konkreta exemplet är det eleverna som förslår *g* för den gröna mätenheten, se bild 6.



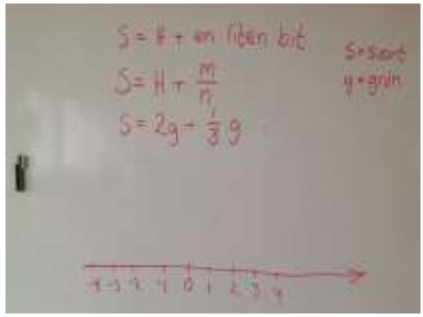


Bild 6a. *Bild 6b.*
Bild 6a: Modellen S = H + m/n utvecklades först, sedan S = 2g + 1/3g.
Bild 6b: Förtydligande av lärarens anteckningar på tavlan.

Modellen fortsatte att utvecklas i en tredje uppgift i samma lektion. Eleverna skulle då mäta den svarta staven med gula stavar. En gemensam diskussion utvecklade bråkdelen i modellen ytterligare. De algebraiska symbolerna som läraren förslagit för bråkdelen i den tidigare uppgiften ersattes av symboler eleverna var med och valde. Modellen utvecklades utifrån den generella modellen *Svart = H + (m/n)* i processen som redovisas i excerpt 15 och 16:

[Läraren pekar på modellen från den förra mätningen; *Svart = H + (m/n)* som står på tavlan.]

1.	Läraren:	Och hur kan vi skriva det svarta med hjälp
2.		av det gula?
3.	Leart:	Med *g*
4.	Läraren:	Ska vi kalla det gula för *g*
5.	Flera elever:	Ja

Excerpt 15.

Efter att klassen är överens om att det gula ska symboliseras med g skriver läraren *Svart = Hg +* *g* på tavlan. Arbetet med att mäta och hur ett mätresultat kan anges fortsätter och läraren tar initiativ till en diskussion om hur bråkdelen ’en liten bit till’ kan förklaras.

1.	Läraren:	Vad är det vi gör när vi har en liten bit till.
2.		Nu behöver alla hjärnor hjälpas åt.
3.	Mehmet:	Två vita finns det
4.	Läraren:	Ja, vi har ju, och vad kan vi kalla det för, om vi ska kalla
5.		det för något.
6.	Nermin:	Litet *d*
7.	Läraren:	*d* som delar. Ja, delar och vad har vi för något här?

8. Hur tänker vi vidare sedan då?

[Läraren skriver ett “*d*” som en täljare i bråkdelen i modellen. *Svart = Hg +d/* □ *g*. Läraren pekar på nämnaren under ”d” och diskussionen fortsätter.]

9. Mehmet: Det där är vita

10. Läraren: Och vad skulle vi kunna ha här under, av hur många?

11. Dana: *v*

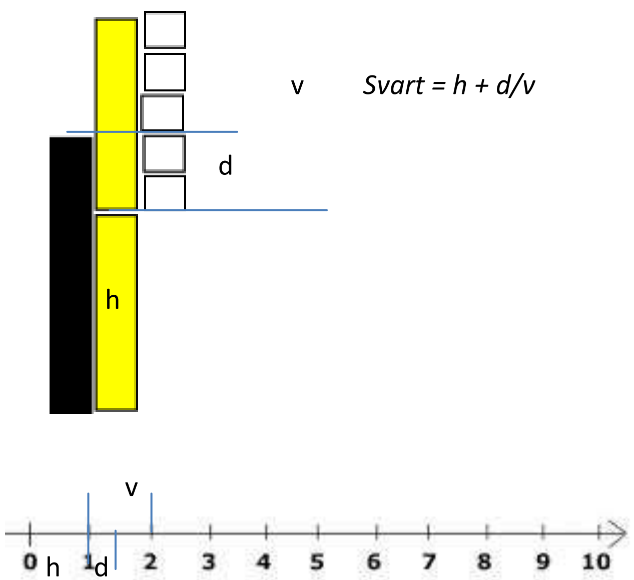
12. Läraren: Förlåt

13. Flera elever: [Ljudar] *vvvvv* som i vita

[Läraren skriver *v* i nämnaren.]

Excerpt 16.

Läraren fyllde i modellen med pennan en gång till och pekade flera gånger på *d/v*. Eleverna valde symbolen *d* för *delar* och *v* för *vita*. Här diskuterades det multiplikativa förhållandet inom bråkdelen av talet, det vill säga antalet små delar av de vita som behövdes för att mäta den svarta i förhållande till totala antalet delar mätenheten delades i. Eleverna argumenterade för att *v* stod för vita och att det var den symbolen de vill använda, se rad 13 i excerpt 16 ovan. Läraren ritade de olika symbolerna på tavlan enligt följande:



Figur 11: Algebraiska symboler kopplade samman de olika redskapen.

Den modell som var utvecklad till det här steget tog eleverna bruk av i lösningar av fler jämförelser. I jämförelsen här ovan kom modellen att förändras ytterligare en gång på elevernas initiativ. Eleverna höll isär mätenheten och variablerna med att hela ordet för färgen skrevs ut;

Svart = H gul + d/v gul. I modellen står *H* fortfarande för antalet hela, *d* för delar och *v* för vita. I den fjärde uppgiften kom modellen på motsvarande vis att skrivas *Svart = H gröna + d/v gröna.* Lärargruppen analyserade denna process som att olika delar i ett rationellt tal kunde diskuteras, samt att många svårigheter med rationella tal blev synliga (se avsnitt 6.2).

Sammanfattningsvis visade lärargruppens analyser att möjligheter för den framväxande lärandeverksamheten utgjordes dels av vilken modell som utvecklades och dels av hur den modellen utvecklades i lektionerna.

En fördjupad analys

Den fördjupade analysen visar att den modell som bäst möjliggör diskussioner om rationella tal utgörs av Davydovs generella modell för rationella tal som användes som inspiration i learning study två. Det kunnande som modellen synliggör diskuteras vidare i avsnittet 6.2 där kunnande av rationella tal presenteras i relation till olika redskapsmedierade handlingar. Analysen visar att den utveckling av modellen som sker i flera steg ger eleverna många möjligheter att diskutera och reflektera över strukturen i rationella tal och hur rationella tal kan representeras (se avsnitt 6.3 där villkor för redskapsmediering redovisas). Modellen ger rika möjligheter att diskutera strukturer i rationella tal genom att den synliggör både heltalsdelen och bråkdelen av talen. Exempel på olika steg i modellutvecklingen kan beskrivas som; 1) *S= H + m/n,* 2) *S=H + vit/vita,* 3) *S= H + d/v,* 4) *S= Hg + (d/v) g,* 5) *Svart=h gul + (d/v) gul* (se tabell 9). Steg 1 och 3 utgör störst likhet med den generella modell som inspirerat arbetet. Steg 2 i modellutvecklingen sker på en elevs initiativ där eleven diskuterar förhållandet mellan hur den lilla enheten som behövs för att mäta objektet som ska mätas förhåller sig till alla små delar som mätenheten delas i. Modellutvecklingen går därefter vidare till en ny generell modell i steg 3. I steg 4 och 5 knyts modellerna till de konkreta jämförelserna som är aktuella genom den specifika mätenhet som respektive uppgift fokuserar. Analysen visar att när modellen utvecklas i fler steg genom redskapsmedierande handlingar möjliggör detta att eleverna både kan arbeta med rationella tal och diskutera uppgifterna. Att diskutera modellen i flera steg ser därför ut att möjliggöra lärandehandlingar som kan utvecklas ur lärarnas undervisningshandlingar. Denna tolkning görs utifrån att eleverna är aktiva i utforskandet, det är inte enbart läraren som initierar utvecklingen av modellen. Utvecklingen av modellen möjliggör alltså lärandehandlingar, och utvecklingen av en modell innehåller spår av en lärandeverksamhet. Analysen visar också svårigheter att gestalta en undervisning som tar sin utgångspunkt i det teoretiska. En svårighet visas i excerpt 7 (sid 75). En elev ger förslag på ett mätresultat både som ett numeriskt resultat och som mer generella symboler. I det här tillfället missar läraren de generella symbolerna, och utvecklar ett numeriskt mätresultat, istället för att utveckla en generell modell.

6.1.5 Modellprovning

Syftet med arbetet i följande lektionssekvens var att prova modellen som utvecklats på olika lösningsexempel. Någon specifik revidering av den här lektionssekvensen var inte möjlig. De modeller som togs i bruk i lektionerna var beroende av vilka modeller som utvecklats i respektive lektion. Lärargruppens analys visade att det var i lektion 3 som elever för första gången redovisar algebraiska symboler i sina arbeten. Lärargruppens analys visade även att det var efter lektion 5 som eleverna lyckades bäst med att få fram ett korrekt mätresultat med stöd i den generella modellen. Den fördjupade analysen bygger därför på analyser av elevernas lösningar från dessa lektioner. Den fördjupade analysen besvarar frågan hur modellen som togs i bruk kunde stötta elever att återge ett korrekt mätresultat.

Arbetet i learning study.

Lärargruppens analys av lektion 3 visade att när modellen, eller formeln i den här lektionen, skulle provas på fler exempel ersatte eleverna de algebraiska bokstäverna med numeriska värden, se bild 7. Eleverna redovisade sedan ett numeriskt svar. Ingen av eleverna redovisade något lösningsförslag med generella algebraiska symboler.

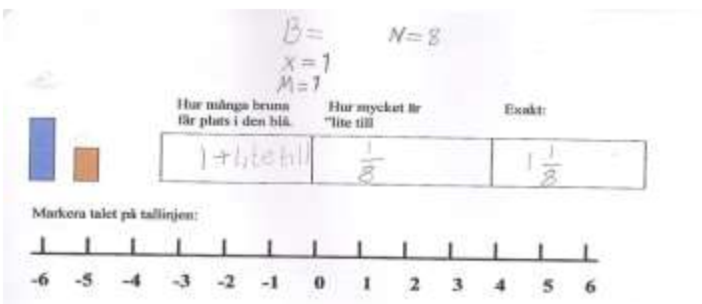


Bild 7: Elevlösning ur lektion 3.

I samma lektion diskuterade två elever ett mätresultat för jämförelsen som visas i bilden ovan. Klassen arbetade enskilt och i smågrupper. I en av grupperna utspelades följande dialog mellan en pojke och en flicka. Det var Fahrad som förklarade för Galina att mätenheten behövde delas i mindre delar. I det är fallet åtta delar. Fahrad förklarade att delarna fanns ”*i*” eller ”*bredvid*”. Prepositionerna blev en metafor för hur man kan se hur mätenheten kunde delas. Eleverna tog inte bruk av de algebraiska symbolerna i sin diskussion, utan använde istället konkreta numeriska exempel,

1. Fahrad: En åttondel

2. Galina: Ahhh

3. Fahrad: Förstår du? Om en åttondel är ju liten…liten

4. Galina: Men åttondel är dom som är här.

5. Fahrad: Om du tänker så här...att det är 8 som får
6. plats. Du tänker så här. Jag tror att det är så. Det här
7. det som är en och sen är det typ 8 i den här eller bredvid
8. den liksom.

9. Fahrad: Så det här är en åttondel, nu då?

10. Galina: Mmm

11. Fahrad: Då får du ju plats med en sån här brun också, på en blå.

12. Galina: Mmm

13. Fahrad: Förstår du?

14. Galina: Mmm

15. Fahrad: En och en åttondel

16. Galina: Alltså en sån här alltså.

17. Fahrad: Nu har du ju lärt dig. Vi kan testa med någon annan.
18. Den här och den här till exempel.

[Här blir eleverna avbrutna av att läraren vill ha en gemensam avslutning av lektionen innan eleverna ska gå på rast.]

Excerpt 17.

Det här är det första exemplet i vårt dokumenterade material där elever i ett eget samtal diskuterade hur tal i bråkform är uppbyggda. Fahrad försöker förklara för Galina hur de olika cuisenairestavarna påverkar mätresultatet.

I lektion 5 redovisade eleverna hur de använt modellen för rationella tal i sina arbetsuppgifter. Ett elevarbete, se bild 8, analyserades av lärargruppen i relation till hur eleven tänkt gällande hur mätenheten måste delas och hur den delningen syns i modellen för ett rationellt tal. Eleven visade hur bråkdelen av talet står i ett förhållande mellan de markerade två vita delarna som ska vara med för att mäta den svarta och det totala antalet vita som mätenheten delades i. I markeringen på tallinjen syns hur avståndet mellan värdet för 1 och värdet för 2 har delats upp i 5 delar. Eleven visar också att ett rationellt tal även kan skrivas i decimalform, även om detta tal, 0,2 är felaktigt (det rätta svaret hade varit 2/5 = 0,4).

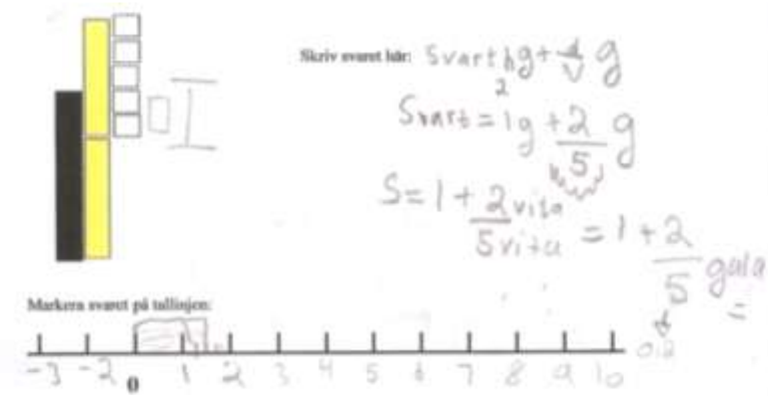


Bild 8: Elevlösning ur lektion 5.

När modellen skulle användas på ytterligare mätresultat i den här lektionen, ändrade eleverna namnet på färgen men behöll de algebraiska symbolerna för variablerna. Ett exempel på detta är hur eleverna löste uppgiften i den efter lektionen följande kartläggningen, *Blå= h brun* + (*d/v) brun*.

Sammanfattningsvis visade lärargruppens analyser att då elever fick möjlighet att utvecklade en modell i flera steg genom att använda algebraiska symboler lyckades de bäst med att hitta ett mätresultat på uppgifterna (se bild 7 och bild 8 samt avsnitt 5.5.3).

En fördjupad analys

En fördjupad analys av hur modellerna togs i bruk av eleverna visar att det var i lektionen då modellen utvecklats i flera steg som eleverna lyckades bäst i den skriftliga kartläggningen (jfr avsnitt 5.5.1). Efter den lektionen lyckades alla elever representera en halv med minst en representationsform, och 7 elever kunde ange ’en halv’ med både bråk- och decimalform, se tabell 3 (sid 57). I dessa 7 elever inkluderas även elever som annars bedöms ha låga förmågor i matematik. Det var även efter den lektionen som störst andel av eleverna, 9 av 13, lyckades ange ett korrekt mätresultat genom att ta bruk av den generella modellen, se tabell 6 (sid 62). Även om inte alla elever lyckades ange ett korrekt mätresultat tog samtliga elever bruk av algebraiska symboler i en modell i sina lösningsredovisningar. Ett exempel på en modell som utvecklades är *Svart=h gul* + *(d/v) gul.* Det var den modellen som medförde möjligheter för eleverna att återge ett korrekt mätresultat. Det verkar därför rimligt att de generella modellerna gestaltade med algebraiska symboler och utvecklade i flera steg utvecklar en lärandeverksamhet för rationella tal. Grunden för den analysen är dels att modellen gör det möjligt att kontrastera en heltalsdel och en bråkdel i talen och dels att modellen utvecklas av algebraiska symboler med ledtrådar som eleverna varit med att etablera. Modellen har vidare möjlighet att utvecklas efter behov som uppstår då uppgifterna ska lösas. Mätenheter och storheter hålls isär genom att eleverna skriver ut hela ordet för färgen på mätenheterna men anger storheterna med en symbol (se bild 8 ovan). Bland de elever som lyckades ange ett korrekt mätresultat fanns samtliga elever som har sitt lärande på sitt andraspråk. Elever som annars har svårt för matematik använde oftare hela namnet på färgen för mätenheten.

6.1.6 Elevreflektioner

Syftet med arbetet i denna sist redovisade sekvens, var att ge elever möjligheter att reflektera över egna och andras förslag till modeller och lösningar (jfr Zuckerman, 2004). Några planerade interventioner var inte möjliga i denna lektionssekvens. De reflektioner som tog form kan rimligen beror av hur de övriga lektionssekvenserna gestaltats.

De sekvenser som redovisas i avsnittet återfinns i lektion 1, 3 och 5. Valet av redovisade lektionssekvenser utgår från lärargruppens analysarbete. Från lektion 1 finns citat från en gruppdiskussion mellan tre elever redovisade som exempel på hur eleverna diskuterade då läraren gett instruktioner om hur uppgiften skulle lösas. Från lektion 3 och 5 finns samtal redovisade där lärargruppen tolkade att elevernas reflektioner utvecklats längst i enlighet med Zuckermans (2004) definition av reflektion.

Den fördjupade analysen besvarar frågan hur eleverna kunde stöttas för att möjliggöra reflektioner i relation till rationella tal. Analysen besvarar också frågan hur möjligheter och svårigheter i detta arbete påverkar den framväxande lärandeverksamheten.

Arbetet i learning study.
I lektion 1 ägde ett samtal rum där elever försökte hjälpa varandra genom kommentarer som ”Från den till den.” ”Men läs vad det står” ”Ska man typ fylla i dom möra?”. Lärargruppen noterade att eleverna inte tog bruk av några matematiska begrepp i sina samtal under den här lektionen. Eleverna var fokuserade på hur jämförelsen mellan de olika stavarna skulle genomföras, istället för att fokusera problemet med att ange ett mätresultat. I planeringsarbetet diskuterade lärargruppen hur det skulle bli möjligt för eleverna att istället diskutera lösningsförslag på uppgifterna.

I lektion 3 fick eleverna, på eget initiativ, möjlighet att redovisa och argumentera för sina lösningar. I slutet på lektionen när läraren skulle summera lektionen, är det flera elever som önskar att det istället är elever som gör detta.

1. Galina: Ett barn kan förklara.

Excerpt 18.

Det mätresultat som skulle redovisasgäller för jämförelsen av en blå stav med bruna stavar. Den generella modell som utvecklades av eleverna i den här lektionen var: *B = h (d/ö) r*, men symbolerna som användes var dock de som gestaltade modellen i elevernas arbetshäften *S = X m/n*. En elev, Karin, gick till tavlan för att redovisa ett mätresultat på en mätning av en blå stav med bruna stavar. I nedanstående excerpt pekade hon först på en blå stav.

1. Karin: Ja, jag tog då dom här stavarna, och sen så... så tog jag
2. en helt ny stav. Och sen lägger man en sån här…
3. En sån här vit och då ser man att det fattas en sån. Då blir
4. det en av åtta.

[Karin pekar på en vit stav.]

5. Läraren: Såg ni hur hon har gjort? Hon har mätt med två bruna,
6. precis som (Namn) och (Namn). Så man frågar hur många
7. bruna, precis så. Hur många bruna blev det då?
8. Karin: En brun och en åttondel.
9. Läraren: En brun och en åttondel blev det. Har ni förstått ni
10. andra?

[En elev, Olivia, går fram till tavlan och tittar på läraren.]

11. Olivia: "*m*" är 1 och "*n*" är 8.
12. Läraren: BRAAAAA *m* är 1 och *n* är 8.

Excerpt 19.

Lärargruppens tolkning var att samtalet till viss del synliggjorde strukturen för tal i blandad bråkform, dels genom hur Karin förklarade mätningen på rad 1-4, och dels hur Olivia på rad 11 ersätter ”*m*” och ”*n*” med numeriska värden.

I lektion 5 gestaltades en situation då mätresultatet i uppgift 4 diskuterades. Läraren pekar på tallinjen, för att få reda på hur eleverna tolkat det rationella talet 1 1/6 som markering mellan 1 och 2 på tallinjen.

1. Läraren: Den här biten mellan 1 och 2 hur har ni gjort?
2. Hur har ni delat upp den? Hur har ni fått till det mellan
3. ett och två?

4. Dana: Jag har ritat sex streck mellan ett och två.

5. Läraren: Varför valde du sex streck mellan ett och två?

6. Evin: Fem streck

7. Läraren: Varför ska det vara fem streck?

8. Evin: Fem streck för att det ska vara. Vi räknar med att ett hopp
9. är ett.

10. Läraren: [Nickar tydligt] För när du sa streck, menade du sex
11. avstånd mellan. För det ska vara hur många delar emellan
12. ettan och tvåan?

Excerpt 20.

Mitt i den här diskussionen om streck och avstånd, tog Peaqua initiativet till en ny tanke om varför det ska vara fem avstånd mellan ett och två. Den tanken syns i fortsättningen av samtalet.

1. Peaqua: Fem delar för det går bort en del.

2. Läraren: Hur tänker du då?

3. Peaqua: [Pekar mot tavlan.] För vi använder ju en etta till den dära
första, sedan är det fem kvar.

[Läraren pekar på den översta gröna]

4. Läraren: Men hur många delar är hela den där? Hur många delar
5. är hela den gröna?

6. Dana: Sex.

7. Läraren: Ja

[Läraren pekar på sexan i nämnaren i 1/6]

8. Läraren: Ja, så det måste alltså vara sex delar emellan... ett och två.
9. Alla dom delarna behöver vara med. Det är alla delar
10. man mäter den översta staven med. Den man tar bort var
11. ser man den någonstans? Den där ettan, hur kommer den
12. att bli synlig? Hur ser man att det är en av sex?

13. Dana: Den är en av dom sex.

14. Chaid: För att det är eeeen av alla vi delar med.

Excerpt 21.

I den här lektionssekvensen fick eleverna möjlighet att reflektera över hur mätenheten delades i mindre delar. Lärargruppens analys visade att eleverna fick möjlighet att koppla denna uppdelning av mätenheten till nämnaren i ett tal i bråkform, se excerpt 21 rad 4-14. Täljarens funktion reflekterade eleverna över på initiativ av Peaqua som menade att den första delen som behövs för att uttrycka objektet som mäts, inte ska vara med i uppdelningen av mätenheten. Utifrån Peaquas resonemang misstänkte lärargruppen att hon såg förhållandet mellan de små delar som mätenheten delades i och den lilla del som behövdes för att mäta objektet som ska mätas som ett additivt förhållande, 5 delar + 1 del. Lärargruppen diskuterade att Peaquas resonemang synliggjorde det multiplikativa förhållande som egentligen råder mellan täljare och nämnare. Dana beskrev det multiplikativa förhållandet på rad 13-14 i excerpt 21 ovan.

Sammanfattningsvis visade lärargruppens analyser att elever gavs möjlighet att reflektera inte enbart i slutet av lektionerna, utan även vid tillfällen då elever gav förslag på lösningar och då olika redskap utvecklades.

En fördjupad analys

Den fördjupade analysen som redovisas i det följande kompletteras av resultatet av de villkor för mediering som redovisas i avsnitt 6.3. Analysen beskriver först situationer av svårigheter för att gestalta elevreflektioner och avslutas med situationer som möjliggör reflektioner. Möjligheten till elevreflektioner påverkas av att problemet i uppgifterna identifieras och att medierande redskap etableras tillsammans med eleverna.

Analysen visar att elevdiskussioner som tar form utan att ett problem identifierats eller utan att eleverna erbjudits stöd i diskussionerna av medierande redskap leder till att eleverna inte reflekterar över något kunskapsinnehåll. Diskussioner utan diskussionsredskap tycks istället handla om procedurerna om hur uppgifterna ska lösas. Analysen visar samtidigt tecken på svårigheter både för lärare och för elever att möjliggöra elevreflektioner, även om eleverna erbjuds medierande redskap. Eleverna uttrycker att de anser att läraren inte kan när eleverna inte får direkta svar på sina frågor. Följande excerpt ur lektion 3 visar detta:

1.	Galina:	Jag fattade inte…det här först... då trodde jag inte du visst vad du gör.

Excerpt 22.

Möjligheten att stötta elever i fördjupade reflektioner utgjorde alltså på det viset ett pedagogiskt dilemma för lärargruppen. Vidare visar den fördjupade analysen att läraren använder många berömmande och värderande ord för elevernas svar, se exempelvis excerpt 19 rad 12 (sid 92), där läraren säger ”BRAAAAA *m* är 1 och *n* är 8”. Efter berömmande kommentarer från läraren avslutas ofta diskussionen och möjligheten till fördjupade reflektioner om rationella tal. Analysen visar fler svårigheter för reflektioner att ta form. Lärares lösningar och förtydliganden på både egna frågor och på elevernas frågor är vanliga. Exempel på ett förtydligande finns i excerpt 20 rad 10-12 (sid 93), där läraren förklarar vad en elev menade ”För när du sa streck, menade du sex avstånd mellan. För det ska vara hur många delar emellan ettan och tvåan…” istället för att be en elev att förtydliga vad som sagts. En tolkning av detta kan vara att en undervisningshandling utvecklas istället för en lärandehandling, det vill säga läraren försöker förmedla lärandet eleverna själva skulle behöva utföra.

Analysen visar att elever reflekterar lättast då de får möjlighet att sammanfatta en undervisning, se excerpt 19 (sid 92) eller då någon elev svarar fel och de andra eleverna kan reagera på detta, se excerpt 20 (sid 93). I sådana situationer finns möjlighet för eleverna att diskutera varandras lösningar, vilket kan tolkas som en möjlighet att utveckla lärandehandlingar. Det som ofta saknas är dock att flera elever är med och diskuterar samma förslag till lösning. Att stötta elever i att reflektera över både egna och kamraters förslag i bemärkelsen av reflektion i en lärandeverksamhet var något som lärargruppen uttryckte att de behöver utveckla vidare i kommande utvecklingsarbete.

6.2 Redskapsmedierande handlingar

I det följande presenteras svaret på den andra frågeställningen, det vill säga vilket kunnande av rationella tal som synliggjordes i relation till olika redskapsmedierande handlingar. De redskapsmedierade handlingar som analyserats i learning study-lektionerna utgör rubriker i presentationen. Analysfrågan som besvaras under samtliga rubriker är identisk med frågeställningen.

6.2.1 Jämföra längder med Cuisenairestavar

För att lösa uppgifterna i lektionerna erbjöds eleverna fysiska redskap i form av cuisenairestavar att jämföra längder. Elever och lärare analyserade förhållanden mellan längderna på de olika stavarna som ingick i uppgifterna.

Det kunnande som synliggjordes i arbetet med att jämföra längder har delats in i två olika kategorier, vilka presenteras här nedan.

Multiplikativt förhållande
Jämförelserna innehöll två olika multiplikativa förhållanden som synliggjordes av cuisenairestavarna. För det första står längden av staven

man mäter och längden av mätenheten i ett multiplikativt förhållande till varandra. För det andra står mätenheten och den lilla delen av mätenheten i ett multiplikativt förhållande.

För att synliggöra det multiplikativa förhållandet mellan staven som skulle mätas och mätenheten försattes eleverna i situationer där samma längd skulle uttryckas med olika mätenheter. Eleverna fick reflektera över hur mätenheten styr värdet av mätresultatet genom att de skulle formulera ett svar på frågan ”Hur kan samma stav representeras av olika tal på tallinjerna?” Ett excerpt ur forskningslektion 1 visar hur svaret diskuterades. Eleverna arbetar med sina arbetsuppgifter., och flera elever ställer samma fråga.

1.	Emil:	Vi har en till fråga i våra papper. Kan vi inte svara på den?
2.	Läraren:	Hur kan samma stav representeras av olika tal på
3.		tallinjerna? Blir ”lite till” alltid lika mycket i varje mätning?
4.	Amii:	Det kan bli olika varje gång.
5.	Fredrik:	Men det måste väl kunna bli lika också?
6.	Läraren:	Visst kan det vara både lika och olika. Hur kommer det sig att det blir olika?
7.	Amii:	Exempelvis den här röda är mindre än den gröna, och då blir det olika svar när man mäter den svarta.
8.	Läraren:	Har ni hört svaret? Det här är extra viktigt varför det blir olika.
9.	Emil:	För att man mäter med olika stavar? Dom är olika stora, då blir det självklart olika svar.
10.	Läraren:	Jag mätte med de gröna. Men det var precis samma svarta stav.
11.		Vi har mätt samma stav men vi har ni? Med den röda fick
12.		vi 3,5 och med den andra fick vi 2 1/3.

Excerpt 23.

Eleverna upptäckte att mätresultatet beror av den enhet man mäter med enligt de multiplikativa förhållandena *Svart = 3 1/2 röda* respektive *Svart = 1 1/3 gröna*.

Även mätenheten och de delar som mätenheten delas i står i ett multiplikativt förhållande till varandra. Några elever i vår studie, bland annat Elie, tyckte dock att det var lättare att prata om ett additivt förhållande mellan mätenheten och den lilla delen som mätenheten skulle delas i. Se rad 6 i följande excerpt.

[Läraren och en elev håller på att mäta en svart cuisenairestavar med röda cuisenairestavar. Mätningen ger svaret *Svart = 3 1/2 röda*.]

1. Läraren: Går det att mäta den svarta med de röda?

2. Elie: Nej

3. Läraren: För att…

4. Elie: …för att det fattas en bit. Och då kan man ta en sådan här vit.

5. Läraren: Fast uppgiften är ju att…

6. Elie: Ja jag vet, bara röda. Men det blir svårt. Det skulle vá
7. lättare att säga…och en vit.

Excerpt 24.

I Elies kommentar blev det synligt att det multiplikativa förhållandet mellan mätenheten och de smådelar mätenheten delades upp i var svårt att urskilja. Elie ville ange ett mätresultat som *Svart = 3 röda + 1 vit.* Detta svar var dock inte förenligt med de förutsättningar som ingick i det problem vi hade att lösa. Mätresultatet skulle anges i den mätenhet som definierades i själva uppgiften. I jämförelsen med cuisenairestavarna kunde eleverna visuellt se att den röda mätenheten kunde delas i två vita enheter. Genom att dela mätenheten med en enhet som var mindre än mätenheten kunde ett exakt mätresultat anges. Det exakta svaret skulle vara *Svart = 3 röda + 1/2 röd*.

Förhållande mellan kvantiteter

I lektion 5 anger eleven Evin det multiplikativa förhållandet mellan den lilla enheten av mätenheten som behövdes för att mäta objektet som ska mätas och enheten som hela mätenheten ska delas i. Utifrån den första uppgiften anger Evin detta förhållande som *1 vit /2 vita,* se excerpt 7 (sid 75). Särskilt intressant i denna lektionssekvens är att Evin beskriver förhållandet mellan delen och helheten både med algebraiska symboler *vit /vita* och numeriska siffror 1/2. Av Evins förslag använder läraren de numeriska siffrorna för att utveckla ett numeriskt mätresultat, men utvecklar inte den generella modellen med Evins algebraiska symboler.

6.2.2 Etablera algebraiska symboler

Under den här rubriken finns kategorier med kunnande som synliggjordes med olika algebraiska symboler. I analysen av lektionssekvensen *Redskapsetablering,* avsnitt 6.3.2, och i analysen av lektionssekvensen *Modellutveckling,* avsnitt 6.3.4, finns exempel på hur de algebraiska symbolerna togs i bruk som medierande redskap.

Det kunnande om rationella tal som synliggjordes i vår studie i relation till algebraiska symboler har delats upp i fyra olika kategorier.

Innebörder i placeringar i den generella modellen
De algebraiska symbolerna synliggjorde innebörder i placeringar för både symboler och siffror i ett rationellt tal. Ett exempel utgörs av hur symbolerna togs i bruk i modellen *Svart = hg + (d/v)g*. I denna modell innehåller symbolen *g* de egenskaper som följer av att mätenheten består av de gula eller gröna stavarna. Den algebraiska symbolen *d* i bråkdelen utvecklades av eleverna utifrån att innebörden i symbolen diskuterats som *delarna* som behövdes för att mäta objektet som skulle mätas. Symbolen *v* utvecklades utifrån innebörden *vita*, det vill säga samtliga vita som mätenheten delas med. Kunnandet om innebörden i placeringen finns alltså inbyggt i den algebraiska symbolen.

Heltalsdelen respektive bråkdelen
De algebraiska symbolerna synliggjorde och möjliggjorde diskussioner om de olika placeringarna i ett rationellt tal eftersom symbolerna innehöll semantiska ledtrådar.

Täljare respektive nämnare
Utan att använda begreppen täljare respektive nämnare togs symboler i bruk som gav ledtrådar till att det var specifika delar av det totala antalet delar som utgjorde bråkdelen av talet. Innebörderna i täljare och nämnare fokuserades, istället för benämningen.

Storheterna respektive mätenheterna
De algebraiska symbolerna synliggjorde även vad som utgjordes av storheterna och vad som utgjorde enheten i mätresultatet. Storheterna representerades med en bokstavssymbol medan enheten representerades av ett helt ord. De algebraiska symbolerna synliggjorde detta tillsammans med tallinjen, mätningen och den generella modellen. Ett tydligt exempel på detta återfinns i figur 11 (sid 86).

6.2.3 Föreslå numeriska symboler

I lektionerna var eleverna aktiva att ge förslag på konkreta numeriska lösningar till de olika uppgifterna. Exempel på dessa numeriska förslag har delats upp i fyra olika kategorier i relation till det kunnande som synliggjordes i förslagen.

Olika mätenheter
I lektion 2 förklarar en elev att kamraten som föreslår sju som ett mätresultat för att ange den svarta staven med röda stavar inte anger resultatet i förhållande till röda mätenheter, utan till vita enheter. Eleven som anmärkte på mätresultatet såg sambandet att *7 vita = 3,5 röda* alltså att

7 halvor = 3,5 hela. Läraren vidareutvecklade inte diskussionen om olika mätenheter.

Del av vilken helhet

32 och 'en kvart', skulle enligt en elev representeras 32,15. 'En kvart' som representeras som ett tal i decimalform skrivs dock 0,25. En kvart skriven som 0,15 gäller sextiondelar. Exempelvis är en kvart av en timme 15 minuter. Eleven hade rimligen blandat ihop 'en kvart' av en timme och 'en kvart' av en hel i positionssystemet.

Positionssystemet

I lektion 1 säger en elev att decimalerna i ett tal i decimalform måste skrivas med grafiskt mindre siffror för att visa att positionen är just decimaler. Läraren antecknar 3,5 på tavlan utan vidare kommentar. Storleken på decimalerna diskuterades inte. Eleverna föreslog även att mätresultatet 3,5 kan skrivas som tre komma noll fem (3,05) eller tre komma fem noll (3,50). De förslag som elever ger för att notera tre och en halv som olika decimaltal visar att eleverna ännu inte fått syn på olika positioner i positionssystemet.

Olika representationsformer

I en lektionssekvens där eleverna gav numeriska förslag på hur mätresultatet en tredjedel skulle representeras gav eleverna endast förslag på tal i decimalform. Läraren visar att mätresultatet måste anges som ett tal i bråkform.

1.	Läraren:	Då skriver vi en tredjedel. Men hur skriver vi detta exakt?
2.	Björn:	2,2
3.	Läraren:	Här måste man ange som bråk.
4.	Mohammed:	2,3
5.	Ahmed:	Då var det väl 1,3
6.	Läraren:	Man kunde ju skriva utan decimaltecken.
7.		Vi kan skriva heltal och sedan bråk. Vi säger att det är
8.		två och sen skriver vi 1 delat med 3.
9.	Ahmed:	Måste man skriva delat?
10.	Läraren:	Det är det som är bråk. Det är det vi håller på att
11.		lära oss. Jag kan berätta en hemlig sak för er. Eftersom
12.		vi just i den här mätövningen måste skriva bråk.
13.	Abbas:	Vi kan skriva 2 och 2,1?

Excerpt 25.

En tolkning av ovanstående är att eleverna ännu inte urskilt att ett rationellt tal ibland kan anges både som tal i decimalform och som tal i bråkform. I samtalet blev det tydligt att tal i decimalform verkar vara en mer känd representationsform än bråkformen. En annan tolkning kan vara att Ahmed tror att både tal i decimalform och tal i bråkform skrivs med ett decimalkomma. Att tecknet för bråk kan se olika ut i olika kulturer uppmärksammades inte lärargruppen (jfr Löwing, 2010).

En diskussion i klassen om att en tredjedel är ungefär lika med 0,333, $1/3 \approx 0{,}33$, $1/3 = 0{,}333\ldots$ initierades av läraren i lektion 1. Den diskussionen finns redovisad i excerpt 8 (sid 76). I diskussionen synliggjordes tecknet för närmevärde samt att tre prickar symboliserar oändligt många. Mätresultatet 1/3 synliggjorde även att alla tal i bråkform inte kan anges som decimaltal. Emil sa först att han hade bestämt sig för att bara lära sig tal i decimalform, men uttryckte senare i lektionen att olika representationsformer såsom tal i bråkform och tal i decimalform behövdes för att ange rationella tal.

6.2.4 Utveckla generell modell

I learning study nummer två, det vill säga i lektion 4 och 5, utvecklades generella modeller för tal i bråkform utifrån Davydovs generella modell för rationella tal, $B = x \cdot F + rem$ (Davydov & TSvetkovich, 1991; Morris, 2000), där *rem* kan utgöras av ett tal i bråkform. Då modellen utvecklats och diskuterats togs den i bruk som ett medierande redskap där rationella tal medierades som tal. Följande tre egenskaper för rationella tal medierades: 1) att heltalsdelen står i multiplikativ relation till objektet som mäts, 2) att täljare och nämnare i bråkdelen står i ett multiplikativt förhållande till varandra samt 3) att ett rationellt tal innehåller ett additivt förhållande som innebär att talet finns mellan *x* och *x+1* där *x* utgör ett heltal.

Multiplikativt förhållande för heltalsdelen

Davydovs generella modell för rationella tal, som i en av våra lektioner utvecklades till *S = h gul + (d/v) gul*, innebar en möjlighet att först diskutera heltalsdelen, symboliserat av termen *h gul* i modellen ovan. I en lektion föreslog läraren symbolen *x* för denna term, och i en annan föreslog läraren symbolen *h*. När symbolen *h* användes utvecklade eleverna termen till att även innehålla *stavfärgen* som utgjorde mätenheten i respektive mätning. Att *heltalsdelen h* står i ett multiplikativt förhållande till den svarta staven synliggörs i termen *h gul*, vilket innebär att *h* antal hela *gula* ryms i den svarta staven.

Multiplikativt förhållande i bråkdelen

I modellen synliggörs vidare att heltalsdelen ska kompletteras med en bråkdel, *rem* i Morris modellen och *d/v* i modellen som diskuteras ovan. Genom elevernas förslag, *d/v*, blev det synligt att *d* som representerade delarna står i ett multiplikativt förhållande till *v* som representerar samtliga delar som mätenheten ska delas i. Hur denna utveckling gick till finns åskådliggjort i analysen av lektionssekvensen *Modellutveckling* i avsnitt 6.1.4.

Additivt förhållande i att ett rationellt tal återfinns mellan x och x+1
Davydovs generella modell synliggjorde att mätresultatet finns mellan *x* och *x+1* där *x* utgör ett heltal. Var mellan två hela tal det rationella talet återfinns bestäms av bråkdelen av talet.

6.2.5 Pröva på tallinjen

När läraren endast visade hur ett mätresultat kunde markeras på en tallinje använde inte eleverna tallinjerna i sina egna lösningar När läraren istället bjöd in eleverna att diskutera hur tallinjen är uppbyggd och samtidigt utforska hela mätenheter respektive delar av mätenheter, tog eleverna bruk av tallinjen i sina egna lösningar (se avsnitt 5.5.3).

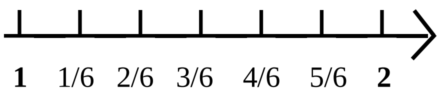
Det kunnande som synliggjorts i arbetet med tallinjen som medierande redskap har delats i fyra kategorier. Dessa kategorier presenteras här nedan.

Relationen mellan tal.
I den inledande kartläggningen med skriftliga uppgifter kunde eleverna konstruera en tallinje som startade vid 0 och visade positiva heltal upp till 5. Endast ett fåtal elever markerade dock kvantiteten en halv på den tallinjen. Eleverna beskriver istället 1/2 som delar av olika föremål, exempelvis en halv hund och till och med en valp. De beskriver även en halv som en halv symbol av en siffra, exempelvis en halv 8:a. Eleverna visar därmed i kartläggningen innan lektionerna att de inte ser rationella tal i relation till hela tal, utan att exempelvis en halv endast finns som del av en helhet.

I samtliga uppgifter i vår studie skulle värdet av mätresultatet markeras på tallinjen genom att avståndet från 0 till värdet av resultatet markerades, se bild 3 (sid 58). Det viktiga för en elev blev då att markeringen gjordes ovanför tallinjen, inte att den började på 0. I lektion ett reagerar elever på de negativa tal som fanns med på tallinjen. Eleven säger: ”Minus en, [ ] Jag fattar inte, kolla”. Eleverna reagerade även på hur det kunde finnas något mellan de hela talen när det inte finns några streck markerade i mellanrummen. I forskningslektion fem säger eleverna att de har en annan tallinje i sina arbetshäften än den som finns på tavlan, eftersom tavlans tallinje slutar med värdet 6, och deras tallinje slutar med värdet 11. Eleverna urskiljer alltså inte i dessa fall att det är relationen mellan de olika kvantiteterna som tallinjen mediera.

En sträcka delas

I lösandet av en uppgift försattes eleverna i en situation där de var tvungna att utforska hur värdet av nämnaren påverkade hur avståndet mellan två hela tal skulle delas. 1/6 skulle det innebära fem eller sex streck mellan två tal, och skulle det innebära fem eller sex avstånd mellan de två hela talen? Kvantiteten av de olika talen representerades på strecken. Hur många streck behövdes för att visa ett bestämt antal delar mellan två hela tal? I excerpt 20 visas hur Evin argumenterar för att det ska ritas till fem streck för att det ska bli sex avstånd, det vill säga att varje avstånd ska symbolisera en sjättedel. Evin säger: ”Fem streck för att det ska vara. Vi räknar med att ett hopp är ett”. Det Evin säger är att avståndet mellan 1 och 2 på tallinjen delas på följande vis:



Hur många tal finns det mellan två rationella tal?

I elevernas arbetshäften finns en explicit fråga som gäller hur många tal det finns mellan två hela tal. I samtliga lektioner kommer eleverna fram till svaret genom att läraren ställer frågan: ”Är det alla sätt man kan dela en sträcka i?” efter alla de förslag på antalet gånger som eleverna föreslår. Svaret på frågan får något olika formuleringar i de olika lektionerna; ”Gogolplex”, ”I miljoner och mer…”, ”Det finns hur många som helst”, ”Den kan delas i massor”, ”Massvis, hur många som helst”, ”Hur många delar som helst”. De två första svaren är konkreta numeriska exempel. De fyra sista är abstrakta generella exempel vilka är hämtade ur lektion 4 och 5.

Storleksordna tal på tallinjen.

Var finns 1/3 på tallinjen? Den här är frågan initierades av läraren i lektion 4, då 2 1/3 skulle placeras på tallinjen. I excerptet nedan visas hur diskussionen tog form under lektionen.

1. Läraren: Rita den svarta staven på tallinjen.

[Aisha kommer till tavlan och pekar med fingret som en båge från 0 till mellan värdet för 2 och 3.]

2. Läraren: Till varför 2 och en halv?

3. Aisha: Från nollan till trean...nästan.

4. Läraren: [Läraren ringar in 1/3.] Är det en halv?

5. Aisha: [Aisha pekar på 3:an på tallinjen.] Nej, tre.

7. Läraren. Är det trean eller en tredjedel? […]Vad menar man med en tredjedel? Håller ni med allihop att den där

8. lilla biten ligger mellan två och tre?

[Aisha går och sätter sig. Läraren kryssar vid markeringen för två och tre på tallinjen.]

9. Läraren: Men var? Förut var det och då vet vi att en halv
10. ligger precis i mitten, eller hur? Men nu är det en
11. tredjedel. Var ligger den? Före halvan?

[Läraren pekar mot tvåan]

12. Läraren: Eller efter halvan? Halvan ligger där.

[Läraren pekar mot trean och sedan mitt emellan tvåan och trean.].

13. Läraren: Placerar ni den efter…[Läraren pekar mot trean]
14. … eller innan? [Läraren pekar mot tvåan].

15. Edgar: Efter. Innan var det två nu är det tre…

16. Läraren: Precis, det var en halv förut och nu är det en
17. tredjedel. Tänker du då att tre är en del till? Att tre är
18. mer än en halv, menar du det?

19. Edgar: Ja

20. Läraren: Okej, om vi tänker så här att du har ett bröd eller en
21. jätte Marabou, som du ska dela. När får du som mest
22. om du delar med två personer eller med tre?

23. Aisha: Två personer. [Många elever säger detta.]

24. Läraren: Två personer. Vilket tal en halv eller en tredjedel.
25. När får du som mest?

26. Många elever: En halv.

27 Läraren: Menar ni att en halv är större än en
28 tredjedel?

[Några elever svarar ja och några svarar nej på frågan. Alla elever låter tveksamma.]

29. Fabia: Nej, nej vänta.

[Många elever surrar med varandra.]

30. Fabia: Trean är mindre.

Excerpt 26.

På rad 5 i excerptet ovan, menar Aisha att en tredjedel ska placeras nära trean eftersom det är en trea i en tredjedel. På rad 15 menar Edgar att två och en tredjedel finns mellan två och en halv och tre eftersom tre är större än två, då måste en tredjedel vara större än en halv. På rad 16 i excerptet ovan ger läraren en kommentar på en elevkommentar. Läraren börjar med att positivt berömma elevens kommentar ”precis”. Därefter frågar läraren om eleven menar att 1/3 är större än 1/2 bara för att det är ”en del till”. Eleven svarar jakande. Utifrån vad läraren säger på rad 16 och 18, antas att läraren misstänkte att eleven tänkte fel. Ändå inleder läraren sin kommentar med den berömmande positiva kommentaren, precis. Ingen i lärargruppen reagerar på detta innan djupanalysen av lektionerna.

6.2.6 Reflektera med språkliga benämningar

Det kunnande som synliggjorts med stöd av ord och benämningar har kategoriserats i tre olika kategorier.

Storleksordna med stöd av prepositioner och adjektiv
De ord som användes då 1/3 och 1/2 storleksordnades var olika prepositioner såsom; mellan, efter och före, men även komparerande adjektiv såsom exempelvis mer, mindre, etcetera. Se excerpt 26 (sid 103) hur dessa ord gestaltades av läraren i lektionen. Läraren använde tallinjen som redskap för att demonstrera alla ord som användes men kontrollerade inte genom någon fråga till eleverna om de förstod.

En liten bit till
’En liten bit till’ användes i diskussioner om bråkdelen i mätresultaten. De uppgifter eleverna skulle lösa innehöll jämförelser där mätenheten inte gick ett helt antal gånger i objektet som skulle mätas. Med ’en liten bit till’ kunde vi diskutera bråkdelen av talet.’En liten bit till’ är inte ett matematiskt uttryck, utan fungerade medierande genom att läraren använde denna benämning och samtidigt pekade vilken del som utgjorde bråkdelen i modellen för rationella tal. ’En liten bit till’ tog form som ett explicit uttalat gemensamt definierat redskap som medierade bråkdelen i mätresultatet.

Benämning av talen mellan de hela talen
I våra lektioner var det många elever som muntligt benämnde alla tal mellan de hela talen med ”en halv”. Eleverna redovisade i skrift att det fanns olika tal mellan de hela talen, men i muntliga diskussioner benämnde många elever alla dessa tal som halv. Efter lektion 4 var det tre elever som i en arbetsuppgift skrev *Blå = 2 brun + en halv* istället för *Blå = 2 bruna + 1/8 brun*, medan det efter lektion 5 endast var en elev som skrev en halv istället för 1/8[10], se tabell 6 (sid 62). I samtliga elevgrupperna fanns elever med somaliska, arabiska, kurdiska (både kurmanji och sorani)

[10] Någon dokumentation av antalet felaktiga muntligt benämnda ’en halv’ är inte genomförd.

respektive turkiska som modersmål. I dessa språk benämner man muntligt tal i bråkform med nämnaren först vilket beskrivits tidigare i uppsatsen (se sid 30). I den fördjupade analysen av lektionerna går det dock inte att avgöra om elever på något systematiskt vis benämner bråkformen enligt den principen. En elev som pratar kurmanji hemma skrev 8/1 istället för 1/8 i den avslutande uppgiften. Men i ett samtal med den eleven trodde hon att 8 skulle stå överst för den var störst, vilket visade att just denna elev inte satte 8:an överst för att hon ville säga nämnaren först.

6.3 Villkor för mediering

I det följande besvaras den tredje frågeställningen som gäller villkor för mediering av rationella tal som tal. Utifrån analysarbetet av den framväxande lärandeverksamheten visade det sig att elevernas möjligheter att identifiera problemet, möjligheter att ta bruk av medierande redskap samt möjligheter till reflektion påverkades av utvecklingen av lärandehandlingar. Det som, i studien, visade sig vara avgörande för dessa lärandehandlingar redovisas i det följande som villkor för mediering. Villkoren redovisas i relation till problemidentifiering, redskapsetablering samt elevreflektioner.

6.3.1 Villkor för problemidentifiering.

Analysen visar att villkor för att eleverna skulle identifiera problemet i uppgifterna bestod både av *hur* problemidentifieringen *gestaltades* i undervisningen och *vilket innehåll* som tog form i identifieringen.

Problemidentifieringens gestaltning
Här presenteras villkor i relation till *hur* problemidentifieringen gestaltades.

Återkommande problemformulering.
Analysen visar att läraren och eleverna behövde återkomma till frågan vad problemet bestod i vid flera tillfällen under en och samma lektion. Detta gällde både i relation till mätningen med cuisenairestavarna, markeringen på tallinjen och i utvecklingen av algebraiska symboler (se avsnitt 6.1.1). Då läraren istället för att fråga eleverna, själv presenterade de redskap som var tänkta att mediera rationella tal, använde inte eleverna redskapen (se avsnitt 5.5.3). Exempelvis använde inte eleverna tallinjen i de lektioner där läraren visade var ett mätresultat i form av ett rationellt tal kunde markeras på en tallinje, se tabell 6 lektion 4 (sid 62). Det samma gällde algebraiska symboler. När läraren presenterade förslag på algebraiska symboler som variabler användes inte dessa av eleverna, se tabell 5 lektion 2 (sid 61).

Elevinitiativ
Analysen visar att när elevers initiativ att återkoppla till svårigheter i redan kända uppgifter uppmärksammades av läraren ledde detta till ökade möjligheter för eleverna att utveckla motiv för att utforska rationella tal (se avsnitt 6.1.1, lektion 3).

Lärarinitiativ
Analysen visar också att vissa *frågor från läraren* ökade möjligheterna för eleverna att delta i en problemformulering, nämligen; ”Vad är problemet?”, ”Kommer någon ihåg bekymret?”, ”Hur fungerar det?”, ”Vad är det som är svårt?”, ”Hur kan vi veta det?” (se avsnitt 6.1.1, lektion 5).

Problemidentifieringens innehåll
Här presenteras villkor för innehållet i de olika redskap som togs i bruk för att identifiera problemet i uppgifterna.

Jämförelse
Cuisenairestavarna möjliggjorde att elever visuellt kunde jämföra olika längder. Längden på staven som skulle mätas jämfördes mot en annan stav som utgjorde mätenhet för jämförelsen. Algebraiska symboler togs i bruk för att redovisa förhållandet mellan de olika stavarna.

Mätenheten
Jämförelserna av olika längder möjliggjorde att eleverna kunde urskilja betydelsen av mätenheten för mätresultatets värde. Jämförelserna visualiserade på det viset hur mätenheten styrde det mätresultat som utgjorde lösningen på uppgifterna.

Relationer mellan olika kvantiteter
Relationer mellan olika kvantiteter exempelvis relationer mellan hela tal och rationella tal kunde åskådliggöras med stöd av en tallinje. Relationer mellan olika kvantiteter i ett tal i bråkform kunde eleverna urskilja som multiplikativ genom att relationen diskuteras med stöd av algebraiska symboler.

6.3.2 Villkor för redskapsetablering

Analysen visar att villkor för de redskapsmedierade handlingar som möjliggjorde att elever kunde urskilja rationella tal bestod både av *hur* de medierande redskapen etablerades och av det *specifika kunskapsinnehåll* som synliggjordes av redskapen.

Redskapsetablering

Här presenteras villkor för *hur* redskapen etablerades för att möjliggöra mediering av rationella tal som tal.

Samtidighet

Det var främst i lektionssekvenser då flera redskap togs i bruk samtidigt, genom att samma algebraiska symboler användes tillsammans med flera olika redskap, som redskapen medierade rationella tal som tal (se avsnitt 6.1.2, lektion 5). I dessa sekvenser utforskade lärare och elever de rationella talen genom att samtidigt utforska de specifika redskapen som togs i bruk, se exempelvis excerpt 20 (sid 93) och excerpt 21 (sid 93) då elever reflekterar över avstånden mellan hela tal på en tallinje.

Kontrastering

I lektionssekvenser där först heltalsdelen i ett mätresultat diskuterades och därefter bråkdelen, lyckades fler elever utforska rationella tal med stöd av de redskap som tagits i bruk. Bråkdelen av mätresultatet utforskade eleverna med stöd av benämningen ’en liten bit till’ se excerpt 4 (sid 68). Med stöd av ’en liten bit till’ och de algebraiska symbolerna kunde heltalsdelen och bråkdelen i ett mätresultat kontrasteras.

Redskapsetableringens innehåll

Här presenteras innehållet som utgjorde villkor för att redskapen skulle mediera rationella tal som tal.

Fysiska redskap

Analysen visar att längderna av stavarna visualiserade hur en mätenhet (F) står i förhållande till den stav som mäts (B) genom variabeln x, enligt $B = x \cdot F$. När eleverna jämförde olika stavlängder blev det synligt att mätenheten inte alltid gick ett helt antal gånger i staven som skulle mätas. Jämförelserna kunde visuellt visa hur mätenheten kunde delas i mindre enheter. Genom jämförelserna blev det synligt hur dessa mindre enheter stod i ett förhållande till mätenheten genom m/n, se figur 11 (sid 86). Jämförelserna av de olika stavarna visade hur förhållandet mellan de mindre enheterna som behövdes i mätningen (m) och samtliga små enheter som mätenheten måste delas i (n) kunde se ut.

Algebraiska symboler

Analysen visar också att när *algebraiska symboler* togs i bruk för att markera olika delar av jämförelsen, exempelvis med H för de *hela* mätenheterna, blev de algebraiska symbolerna en ledtråd, i form av en semantisk innebörd, till hur symbolerna kunde urskiljas, se excerpt 6 (sid 73). På motsvarande sätt kunde en semantisk innebörd i de algebraiska symbolerna utnyttjas för att utveckla egna symboler för bråkdelen av mätresultatet, se excerpt 16 (sid

86). De *delar* som mätenheten delades i och som behövdes för att mäta objektet som skulle mätas benämnde eleverna *d* och alla smådelarna som utgjordes av *vita* mätenheter benämnde eleverna *v*. Eleverna låter alltså symbolerna *d* respektive *v* ersätta de mer vedertagna symbolerna som läraren föreslår för täljare respektive nämnare, *m/n*. När eleverna tog samma algebraiska symboler i bruk tillsammans med samtliga övriga redskap fungerade de algebraiska symbolerna medierande för rationella tal genom att täljare och nämnare kunde åskådliggöras med både jämförelser, tallinjen och den av klassen utvecklade modellen, se figur 11 (sid 86).

Generella modeller
Analysen visar att den *generella modellen* för ett rationellt tal eleverna varit med att utveckla, *Svart = H + (d/v)* togs i bruk som ett medierande redskap (se avsnitt 6.1.4, lektion 5). I modellen synliggjordes strukturen för ett rationellt tal genom möjligheten att förtydliga de multiplikativa förhållandena dels mellan mätenheten och objektet som ska mätas, genom termen *Svart = H gula*, och dels mellan mätenheten och de mindre delarna som mätenheten måste delas i, genom termen *(d/v) gula*. Modellen utvecklade eleverna genom att de algebraiska symbolerna i modellen intog en semantisk innebörd knuten till innebörden i symbolens placering. I modellen separerades även variabler och enheter genom att enheten skrevs ut med ord och variabler angavs med algebraiska symboler. När modellen utvecklats till *Svart = H gula + (d/v) gula*, tog eleverna bruk av modellen även i nya uppgifter genom att eleverna ändrade färgbeteckningarna då mätenheten förändrades, men de behöll symbolerna för variablerna (se avsnitt 5.5.3 och avsnitt 6.1.5).

Benämningar
Analysen visar att *'en liten bit till'* togs i bruk av läraren och eleverna för att diskutera bråkdelen av mätresultaten, se excerpt 4 (sid 68), i samband med att de algebraiska symbolerna utvecklades för att synliggöra strukturen i den generella modellen *B = x F + (m/n) F*.

Tallinjen
Analysen visar att *tallinjen* togs i bruk för att visuellt visa relationer mellan tal, hur en sträcka mellan två hela tal kunde delas i ett bestämt antal avstånd, se excerpt 20 (sid 93) och excerpt 21 (sid 93), hur många delar avståndet mellan två tal kunde delas i (se avsnitt 6.2.5), samt för att storleksordna tal i bråkform, se excerpt 26 (sid 103).

Numeriska mätresultat
Analysen visar att eleverna var engagerade då de gavs möjlighet att föreslå numeriska mätresultat (se avsnitt 6.1.3). De numeriska exempel som eleverna gav bekräftar svårigheter med rationella tal som beskrivs av tidigare

forskning. Svårigheterna som blev synliga i förslagen handlade om positionssystemet (se avsnitt 6.1.3), att storleksordna tal i bråkform se excerpt 26 (sid 103), att se del av vilken helhet, se excerpt 20 (sid 93) och excerpt 21 (sid 93), att rationella tal kan representeras på olika sätt se excerpt 8 (sid 76), samt att förstå att antalet rationella tal mellan två hela tal är oändligt många (se avsnitt 6.2.5).

6.3.3 Villkor för elevreflektioner

Här redovisas slutligen villkor för de elevreflektioner som möjliggjordes. Villkoren bestod både av *hur* elevreflektionerna gestaltades samt av *vilket* kunskapsinnehåll som synliggjordes i relation till de redskap som togs i bruk.

Elevreflektionernas gestaltning
Här presenteras villkor gällande *hur* undervisningen gestaltades för att elever skulle reflektera över rationella tal som tal.

Upprepande av elevfrågor
Analysen visar att tillfällen då en fråga från en elev besvarades av elevgruppen engagerade många elever i att diskutera rationella tal, se excerpt 20 (sid 93) och excerpt 21 (sid 93). Men analysen visar också att läraren ibland svarade både på egna och på elevers frågor, se excerpt 20 rad 10-12. Både läraren och eleverna tycks ha svårt med att läraren enbart upprepar en fråga från en elev, och utan att besvara frågan vidarebefordrade den till elevgruppen. Eleverna undrade vid ett tillfälle om inte läraren kunde svaret eftersom frågorna lämnades över till elevgruppen, se excerpt 22 (sid 94).

Besvara styrda frågor
Analysen visar att de frågor som fanns i elevernas arbetsblad gav möjligheter att reflektera över rationella tal. Exempel på dessa frågor var ”Varför blir det lite till? och ”Blir lite till alltid lika mycket i varje mätning”, där ”lite till” utgjorde bråkdelen av mätresultatet (se avsnitt 5.3).

Diskutera kamraters förslag
Analysen visar att elevers diskussioner om rationella tal stöttades genom att elever erbjöds att förklara varandras förslag till lösningar. Diskussioner om kamraters lösningar underlättades av att elever redovisade sina lösningsförslag med hjälp av medierande redskap. Diskussioner om kamraters lösningar underlättades också av felaktiga lösningar, där kamrater hade idéer om hur en korrekt lösning skulle kunna redovisas, se excerpt 20 (sid 93).

Elevsammanfattningar
Analysen visar att ett villkor för elever att reflektera över rationella tal var att elever fick möjlighet att sammanfatta innehållet ur ett undervisningsmoment, se excerpt 19 (sid 92).

Elevreflektionernas innehåll
Här presenteras villkor för det innehåll i relation till olika redskap som möjliggjorde elevreflektioner.

Benämningar
Bråkdelen kunde diskuteras och benämnas genom ’en liten bit till’, se excerpt 4 (sid 68). Benämningen togs i bruk av både elever och lärare för att reflektera över bråkdelen i modellen.

Algebraiska symboler
Möjligheten för elever att utforska rationella tal som tal fanns i handlingen där eleverna utifrån mätningen, tar tallinjen och den generella modellen i bruk i sina egna arbeten och kopplar samman dessa redskap med algebraiska symboler, se bild 8 (sid 90). I lektioner där elever inte erbjuds att vara delaktiga i att utveckla algebraiska symboler får eleverna inte heller några möjligheter att reflektera över rationella tal som tal. Elevernas vilja att diskutera om rationella tal ökar då eleverna kunde ta bruk av algebraiska symboler med en, för eleverna, semantisk innebörd, se excerpt 12 (sid 82); excerpt 15 (sid 84), samt excerpt 16 (sid 86).

7. DISKUSSION

> The essence of either description of generalization is that the ”general” itself is interpreted as the “identical” or the “similar” in a group of objects. The process of generalization is finding a given “general” element and forming a class as its carrier. (Davydov, 1990, s. 21.)

Utifrån syftet med uppsatsarbetet diskuteras i det följande vad i en algebraisk lärandeverksamhet som gör det möjligt att rationella tal kan urskiljas som tal. Utifrån syftet diskusteras även learning study som metod för att besvara studiens forskningsfråga. Avslutningsvis diskuteras några implikationer för undervisning utifrån det påvisade resultatet.

7.1 Resultat- och metoddiskussion

Genom tidigare forskning kan vi få väl beskrivet vad kunnande om rationella tal innebär. I tidigare forskning kan vi också få beskrivet vilka svårigheter elever kan möta för att utveckla kunnande av dessa tal via numeriska exempel i en aritmetisk undervisningstradition (se exempelvis Ball, 1993; Hart, 1981; Hiebert & Waerne, 1986; Kieren, 1988; Lamon, 2005; Mack, 1993; Niemi, 1996; Steffe & Olive, 2010). I det learning study-arbete som utgjorde grunden för uppsatsen upplevde vi lärare att eleverna var aktiva med att föreslå numeriska mätresultat till uppgifterna i lektionerna, men den fördjupade analysen i studien visade att det verkliga utforskandet av rationella tal tog form då algebraiska symboler etablerades tillsammans med eleverna. I tidigare forskning går det också att konstatera en positiv inverkan när det gäller elevers kunnande av rationella tal då algebraiska symboler tas i bruk som medierande redskap (se Davydov & TSvetkovich, 1991; Morris, 2000). Denna forskning gäller undervisning designad enligt Elkonins och Davydovs matematikdidaktiska program gestaltad i en algebraisk lärandeverksamhet. Men vad i den algebraiska lärandeverksamheten möjliggör att kunnande av rationella tal som tal utvecklas?

En algebraisk lärandeverksamhet kännetecknas av att eleverna involveras i ett teoretiskt problemlösande arbete (jfr Davydov, 2008). De diskussioner och reflektioner som tar form tillsammans med eleverna i arbetet i en lärandeverksamhet, möjliggörs via ämnesspecifika medierande redskap (Kinard & Kozulin, 2010). För ett lärande i matematik ses det till och med som nödvändigt att medierande redskap tas i bruk, eftersom matematik utgör en abstrakt teoretisk ämnesdisciplin (jfr Vygotsky, 1934; Davydov, 2008).

Resultatet av föreliggande studie visar i likhet med Morris (2000) att det är möjligt att utveckla kunnande om rationella tal med stöd i algebraiska symboler även om undervisningspraktiken i vanliga fall bygger på en aritmetisk tradition (se uppsatsens avsnitt 5.5.3 och avsnitt 6.2). Resultatet visar att detta är möjligt i och med att en algebraisk lärandeverksamhet utvecklas, där de algebraiska symbolerna tas i bruk i modeller för rationella tal. Den algebraiska lärandeverksamheten innebar dock, vilket diskuteras längre fram i texten, att invanda turtagningsregler i samtal i lektionerna utmanades, något som både lärare och elever ibland gav uttryck för att de upplevde konstigt. Utifrån analysresultatet och grundtankarna för en lärandeverksamhet, diskuteras i det följande; för det första hur en problemidentifikation kan påverka möjligheterna att utveckla en algebraisk lärandeverksamhet, för det andra både *hur* de medierande redskapen tas i bruk och *vad* det specifika med dessa redskap består *i*, samt för det tredje hur elevreflektioner påverkar dessa möjligheter.

Studien visar att *identifikationen* av *problemet* i uppgifterna påverkar möjligheten för uppgifterna att ta form som lärandeuppgifter och därmed möjligheten att utveckla en lärandeverksamhet. Davydov (2008) menar att en uppgift har möjlighet att utvecklas till en lärandeuppgift när eleverna blir aktiva i att utforska det kunnande som uppgiften har som mål att belysa. Analysen visar att lärandeuppgifter har möjlighet att utvecklas dels när eleverna tar initiativet och formulerar ett problem och dels när läraren, genom frågor, guidar eleverna till en problemformulering[11]. När eleverna var delaktiga i att formulera problemet i uppgifterna utvecklades motiv att reflektera över teoretiska begrepp i relation till rationella tal. För att identifiera problemet visar studien ett behov av redskap som kunde synliggöra och stötta formuleringen av dessa teoretiska begrepp (jfr Davydov, 2008; Sophian mfl, 1997; Veneciano mfl, 2014). Att en undervisningspraktik i matematik byggs upp utifrån ett problem diskuteras av van Oers (2001) som en av matematikens grundidéer. Problemidentifiering i en lärandeverksamhet skiljer sig dock från problemlösning i den aritmetiska traditionen. I en aritmetisk tradition utgör numeriska siffror ofta lösningen på ett problem och ur dessa siffror kan en formel utvecklas (jfr Polya, 1945; Taflin, 2007). I en algebraisk tradition utgår ett teoretiskt arbete alltid från ett problem som måste identifieras tillsammans med eleverna (jfr Davydov, 2008). Problemidentifieringen måste ske med stöd av medierande redskap (van Oers, 2001; Wertsch, 1998). Wertsch beskriver *mediereande redskap* som att de innefattar både möjligheten att synliggöra ett teoretiskt kunskapsinnehåll och att de utgör själva kunskapsinnehållet. Vad utgjorde då möjligheterna med de

[11] Analysen av våra lektioner visar tecken på att uppgifterna hindrades från att utvecklas till lärandeuppgifter av att lärarna instruerade eleverna om hur uppgifterna skulle lösas.

medierande redskapen, *algebraiska symboler och generella modeller*, som togs i bruk i föreliggande arbete för att urskilja rationella tal som tal?

De *algebraiska symbolerna* utgjorde en möjlighet att diskutera innebörder av och förhållanden mellan olika placeringar av symbolerna i de modeller som utvecklades. Specifikt var det när symbolerna innehöll någon form av ledtråd till den innebörd de representerade som symbolerna medierande strukturer i rationella tal. Ett exempel utgörs av att symbolen *x* inte fick någon funktionell betydelse i någon av studiens forskningslektioner, medan symbolen *h* som eleverna förknippade med ordet *hel* innebar att eleverna fick syn på att ett rationellt tal består av både en heltalsdel och en bråkdel. Att symbolerna fick en semantisk innebörd tolkade vi som ett första steg i utvecklandet av ett algebraiskt tänkande (jfr Mason, 1996). Resultatet i Adolfsson m.fl. (2012) visade att symbolerna A, B respektive C, som lärarna och eleverna valde, möjliggjorde diskussioner om hur olika långa cuisenairestavar kunde jämföras. I Adolfsson m.fl. kunde eleverna även generalisera symbolerna genom att pröva bokstäver som de valde helt själva. I vårt iterativa learning study-arbete provades olika sätt att etablera de algebraiska symbolerna, från att fråga efter en enskild bokstav i samband med att ersätta numeriska siffror i ett mätresultat, till att en och samma symbol som föreslagits av eleverna, användes tillsammans med flera olika redskap. I likhet med vad Kinard och Kozulin (2012) skriver, visar resultatet att flera medierande redskap behöver tas i bruk för att utforska ett kunnande. Studien visar att det dessutom var ett villkor för att utveckla kunnande om rationella tal som tal, att samma algebraiska symbol användes tillsammans med flera olika redskap. Symbolerna användes för att synliggöra innebörderna i heltalsdelen respektive bråkdelen genom 1) de visuella jämförelserna av längder, 2) de modeller som utvecklades, 3) tallinjen och 4) benämningen ’en liten bit’. Med variationsteoretiska begrepp hölls de algebraiska symbolerna konstanata medan de medierande redskapen varierade. Genom den generalisering som tog form, finns enligt variationsteorin möjlighet att urskilja de algebraiska symbolerna och därmed troligtvis även urskilja de innebörder som eleverna gett symbolerna. Många av de svårigheter som gäller rationella tal som påvisas i översikten av den tidigare forskningen kunde diskuteras tillsammans med eleverna då dessa redskap togs i bruk. Exempel på svårigheter som diskuterades i våra lektioner finns presenterade i avsnitt 6.2 där redskapsmedierande handlingar i relation till olika medierande redskap beskrivs. I avsnittet beskrivs bland annat hur eleverna diskuterade avståndet mellan två hela tal på en tallinje och hur det avståndet borde delas för att åskåsliggöra sjättedelar (jfr Kilhamn, 2011; Olive, 2011).

Den *generella modellen*, $B = x\,F + rem$ (se Davydov & TSvetkovich, 1991; Morris, 2000), gjorde det möjligt för eleverna att urskilja och diskutera rationella tal. För att eleverna i våra lektioner skulle urskilja rationella tal som tal tycktes det vara en fördel att modeller utvecklades i fler steg (jfr Kozulin & Kinard, 2008; Roth & Wang, 2006; Van Dijk, van Oers, Terwel & van den Eeden, 2003). Kozulin m.fl. menar att symboler eller modeller som ska fungera som medierande redskap aldrig kan ses som färdigutvecklade produkter som presenteras för eleverna. Symboler och modeller bör hellre ses som processer som utvecklas i samspel mellan lärare och elever. För att utveckla teoretiska begrepp menar Roth m.fl. att det är avgörande att arbetsprocessen pendlar mellan teoretiska och empiriska begrepp, det vill säga mellan generella modeller och modeller specifika för en konkret empiri. I vår studie har en sådan process analyserats i lektion 5 (se tabell 9, sid 81). I den lektionen utvecklades en modell för mätresultatet i en process mellan två olika generella modeller *S = H + m/n* och *S = H + d/v* och tre modeller som var knutna till emiriska mätresultat *S = H + vit/vita*, *S = Hg + (d/v) g*, och *Svart = h gul + (d/v) gul*. Van Dijk m.fl. menar att elevers möjligheter att vara delaktiga i liknande processer, där modeller konstrueras och rekonstrueras, är avgörande för att utveckla teoretiska begrepp. Teoretiska begrepp som eleverna i våra lektioner kunde utforska var bland annat de multiplikativa förhållanden som finns i rationella tal (jfr Vergnaud, 1988). Dessa förhållanden finns mellan heltalsdelen och det objekt man mäter, exempelvis *Svart = h gul*, och inom bråkdelen av talet, exempelvis *(d/v) gul*. Bråkdelen kunde även urskiljas genom benämningen ”rem” som används i Morris (2000), eller genom benämningen ’en liten bit till’ som användes i våra lektioner. ’En liten bit till’ utvecklades på lärarens initiativ till *m/n* där *n* är det totala antalet delar som mätenheten delas i och *m* är antalet av dessa delar som behövs för att mäta objektet som ska mätas. Det multiplikativa förhållandet som (*m*) står i till det totala antalet små delar (*n*) blev synligt för eleverna när symbolerna diskuterades och användes tillsammans med flera medierande redskap. Symbolerna *m/n* utvecklades av eleverna till *d/v* där *d* symboliserade *delar* och *v* symboliserade *vita* som ledtrådar till innebörden i deras placeringar. Troligtvis var det tack vare de algebraiska symbolerna i den generella modellen ihop med tallinjen och längdjämförelsen som bråkdelen kunde diskuteras. I modellen sammanfogas de båda multiplikativa uttrycken av ett additivt förhållande *H* + *m/n.* Detta additiva uttryck gör det möjligt att diskutera att bråkdelen i talet finns mellan heltalet *H* och heltalet *H+1*. Att de två termerna blev synliga för eleverna kan vara en anledning till att eleverna delade upp avståndet på tallinjen mellan de två tidigare nämnda heltalen. Detta additiva förhållande var svårt att synliggöra med representationen för tal i blandad bråkform som användes i de första lektionerna *S = a b/c*[12]. I stället för att läraren presenterade hur uppgifter ska lösas med förväntningen att eleverna skulle göra lika

[12] S är den svarta staven som mäts, a är antalet hela mätenheter, b/c är bråkdelen av mätenheten som också behövs för att göra jämförelsen.

(undervisningshandlingar), gjorde den stegvisa utvecklingen av modellen det möjligt för eleverna att vara aktiva i att utforska de rationella talen (lärandehandlingar). Processen med att utveckla modellen i flera steg kan därför utgöra skillnaden mellan undervisningshandlingar och lärandehandlingar. Lärandehandlingarna tog form genom att eleverna kunde placera mätresultaten bland de hela talen på tallinjen, och eleverna kunde redovisa de rationella mätresultaten som tal. Processen med den stegvisa utvecklingen av modellerna gjorde det möjligt att både kontrastera heltalsdelen och bråkdelen av talen och separera täljare och nämnare i bråkdelen av talen.

Studien visar att utvecklingen av elevernas möjligheter att *reflektera över kunskapsinnehållet* utgör ett dilemma för lärargruppen som behövde särskilt fokus i det iterativa learning studyarbetet. Davydov (2008) hänvisar till Vygotsky och argumenterar för att både en personlig och en kognitiv utveckling påverkas av möjligheter att reflektera. Davydov menar att utveckling kräver reflektioner över både egna och andras sätt att förklara ett tänkande. Lärargruppen upplevde dock att det var svårt att göra det möjligt för eleverna att reflektera över kunskapsinnehållet som det tog form i lektionerna (jfr Zuckerman, 2004). Lärarna bemötte ofta elevernas kommentarer med ”bra”, ”precis” och ”riktigt bra”. I analysen av lektionerna blev det tydligt att när läraren bemötte elevernas inlägg på detta sätt avslutades i samtliga fall den diskussion som höll på att ta form (jfr Löfgren & Lindberg, 2011). I likhet med Löfgren m.fl. studie, visar alltså analysen av våra lektioner att detta beröm stoppar pågående diskussioner, vilket försvårar utvecklingen av elevreflektioner och därmed även utvecklandet av en lärandeverksamhet. I stället för att erbjuda eleverna möjligheter att reflektera över kunskapsinnehållet, sammanfattade och svarade lärarna själva vid flera tillfällen på de frågor som ställdes i lektionerna. När lärarna tog över och svarade på egna frågor, kommenterade inte eleverna detta. De fortsatte inte heller den diskussion som pågick. Däremot kommenterade eleverna att de trodde att lärarna inte kunde, när lärarna vid några tillfällen istället för att svara uppmuntrade eleverna att diskutera vidare. Kan detta vara ett uttryck för en osynlig praktikgrund, eller ett språkspel elever och lärare har någon form av tyst överenskommelse om? Kan det i den rådande undervisningstraditionen vara underförstått att läraren ska förse eleverna med rätta lösningar? Morris och Schmittau (2004) påpekar att det tog ungefär ett år för lärarna att bli bekväma med grundtankarna i den algebraiska undervisningstraditionen. Kan den begränsade omfattningen i en learning study, i det här fallet endast fem lektioner för att bearbeta en undervisningstradition, vara en anledning till svårigheterna att få elevreflektioner och därmed även lärandehandlingar att ta form?

För att bemöta kritik mot forskning med karaktären av longitudinellt designexperiment framför Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer & Schauble (2003) vikten av att mäta utfallet av en studie eller experiment. Elevers resultat på för-och eftertest som ibland får stor tyngd i ett resultat av en learning study kan ses som ett arv från sådan kritik. I learning study-arbetet i föreliggande studie har vi istället för att betona skillnader i kvantitativa resultat på test, genomfört ett kartläggningsarbete med både skriftliga frågor till eleverna och observationer från de olika lektionerna. Utifrån syftet med arbetet vill jag hävda att den empiriska förankringen av detta kartläggningsarbete gav en rimlig möjlighet att utvärdera interventionerna i det iterativa arbetet (jfr Larsson, 2005).

Med learning study som forskningsansats kunde undervisningen i relation till det aktuella lärandeobjektet undersökas i en klassrumspraktik tillsammans med praktikens ordinarie aktörer, lärare och elever. Utifrån syftet med studien att utforska vad i en algebraisk lärandeverksamhet som gör det möjligt att urskilja rationella tal som tal, framstod den iterativa modellen för learning study som funktionell för att utveckla en framväxande lärandeverksamhet. Arbetet gjorde det möjligt att studera de medierande redskap som togs i bruk. I den iterativa modellen gick det att få syn på exempel för hur modeller för rationella tal kan utvecklas i växelverkan mellan teoretiska och empiriska begrepp (jfr Van Dijk, van Oers, Terwel & van den Eeden, 2003; Repkin, 2003; Roth & Radford, 2011; Zuckerman, 2004). Learning study som modell för praktiknära forskning innebär dock begränsningar som diskuterades i metodkaplitet. Modellen innebär bland annat ett begränsat antal informanter, ett begränsat antal lektioner, samt den komplexitet som ett klassrum utgör för underlag i datamaterialet.

I learning study är det brukligt att variationsteori används både som design och analysredskap. I föreliggande uppsatsarbete användes variationsteori som ett kompletterande teoretiskt ramverk i grunddesignen av lärandeuppgifterna. Stöd för andra lärandeteoretiska ramverk i arbete med learning study ges av Marton (2014) och Ling Lo (2012). Marton skriver att arbete med learning study kräver en förankring i något teoretiskt ramverk för lärande. Ling Lo ser learning study som en plattform för att använda variationsteori, men skriver också att variationsteori är kompatibel med andra lärandeteoretiska ramverk. I den här studien tar både lärargruppens iterativa learning study-arbete och det fördjupade analysarbetet av datamaterialet sin teoretiska utgångspunkt i lärandeverksamhet. Möjligheten att förankra analysen i det empiriska datamaterialet visar att perspektivet fungerade som didaktiskt redskap i en learning study (jfr Larsson, 2005).

7.2 Slutsatser och implikationer för undervisning

Resultatet i föreliggande arbete visar att det är möjligt att utveckla en undervisning där rationella tal kan urskiljas som tal genom att ta bruk av de medierande redskap som kan ses som utmärkande för en algebraisk lärandeverksamhet. Detta gäller även tillsammans med elever som tidigare endast arbetat i en aritmetisk praktik. I analysen av elevernas skriftliga lösningar framstår det som rimligt att anta att elever som har sitt lärande i matematik på sitt andra språk gynnades av dessa medierande redskap. Analysen visar även att elever som av någon anledning bedöms som matematiksvaga gynnades av den algebraiska lärandeverksamheten. Med stöd i de medierande redskapen kunde samtliga elever ta del i diskussioner om rationella tal. Analysresultatet visar att undervisningspraktiken kan förändras i förhållande till den traditionella undervisningen. Resultatet visar också att både lärare och elever ibland uttrycker en ovana i den förändring av undervisningen som görs. Eleverna frågade om läraren inte kunde svara själv, eftersom läraren inte svarade på frågor utan ville att eleverna skulle diskutera frågorna. Studien visar att lärare istället för att ge instruktioner med numeriska exempel kan skapa andra förutsättningar för lärande med stöd av medierande redskap. Av de elevdiskussioner som tog form och de elevlösningar som redovisades i de lektioner där en lärandeverksamhet utvecklades, bidrog de redskap som är specifika för en algebraisk lärandeverksamhet till att eleverna kunde reflektera över rationella tal i relation till de hela talen och redovisa mätresultat för jämförelser. Eleverna kunde placera talen på en tallinje och ange ett mätresultat i form av tal i bråkform. Detta kan ses som en indikation på att elever behöver få tillgång till algebraiska symboler som redskap för att utveckla kunnande om rationella tal som tal. Algebraiska symboler tycks vara ett funktionellt redskap som ger detta stöd när de tas i bruk i processer om flera steg för att utveckla matematiska modeller. De algebraiska symbolerna verkade mediera kunnande om heltalsdelen respektive bråkdelen i ett rationellt tal genom möjligheten att innehålla semantiska ledtrådar till de placeringar symbolen hade i de generella modellerna. Det verkar dock finnas viss risk att eleverna tar fasta på symbolerna som fonem och tror att modellerna bildar ord som ska ljudas ihop. Studien visar inte eller jämför inte hur andra lärandeteoretiska ramverk skulle möjliggöra utvecklingen av elevernas förståelse av rationella tal som tal.

En algebraisk lärandeverksamhet har stöd i de nu rådande styrdokumenten för matematikundervisningen i Sverige. I Lgr 11 skrivs problemlösning fram både som ett centralt innehåll och som en förmåga i den inledande syftestexten. Algebra, med fokus på prealgebra som fokuserar likheter och mönster i matematik, finns upptaget som centralt innehåll redan från årskurs

1. Kursplanen är framskriven inom en aritmetisk undervisningstradition, men att använda algebraiska symboler och modeller för att synliggöra matematiska mönster och strukturer, vilket är kännetecknande för en algebraisk lärandeverksamhet, ryms alltså inom kursplanens skrivningar (jfr avsnitt 2.2.1, texten om Lgr 11). I en algebraisk lärandeverksamhet utgår all undervisning från problem som ska lösas.

Lärandeverksamhet som lärandeteoretiskt ramverk för design och analys av lektionerna i denna studie, verkar ge lärargruppen stöd för att utveckla en undervisning som ger möjlighet att synliggöra rationella tal som tal. Enligt Schmittau och Morris (2004) longitudinella studie tar det dock tid för både lärare och elever att känna trygghet i en algebraisk undervisningstradition. Samma tendens visas i föreliggande studie där lärararbetslaget arbetade i den iterativa processen i learning study under två höstterminer för att lektionerna skulle utvecklas i riktning mot en lärandeverksamhet. Hinder och svårigheter för att utveckla lärandeverksamheten identifieras bland annat som tysta överenskommelser och invanda språkspel mellan lärare och elever. Utifrån resultatet av Morris studie och resultatet av föreliggande studie vore det intressant att pröva fler delar av Elkonins och Davydovs matematikdidaktiska program under en längre tid i en annars aritmetisk undervisningstradition. Det vore också intressant att utveckla nya lärandeuppgifter utifrån tanken om att kunnande i matematik utvecklas från abstrakt till konkret. Vilket kunnande och vilka förmågor kan utvecklas via lärandeuppgifter, som på sikt möjliggör utveckling av både algebraiskt och aritmetiskt tänkande i matematik?

8. REFERENSER

Adamson, B., & Walker, W. (2011). Messy collaboration: Learning from a Learning Study. *Teaching and Teacher Education*, 27 (1) 29-38.

Adolfsson Boman, M., Eriksson, I., Hverven, M., Jansson, A., & Tambour, T. (2013). Att introducera likhetstecknet i ett algebraiskt sammanhang. *Forskning om undervisning och lärande*, (10) 29-49.

Andrews, P., & Sayers, J. (2012). Teaching linear equations: Case studies from Finland, Flanders and Hungary. *The Journal of Mathematical Behavior*, 31 (4) 476-488.

Ball, D. (1993). Halves, pieces and twoth: constructing and using represential contexts in teaching fractions. i T. P. Carpenter, E. Fennema, & T. A. Romberg, *Rational numbers. An integrating of research* (s. 157-195). Hillsdale: Lawrence Erlbaum.

Berch, D. (2005). Making Sense of Number Sense: Implications for children With Mathematical Disabilities. *Journal of Learning Disabilities*, (s. 333-339).

Björklund, C. (2007). *Hållpunkter för lärande. Småbarns möte med matematik.* Åbo: Åbo akademis förlag.

Björndal, C. (2010). *Det värderande ögat.* Stockholm: Liber.

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics.* Netherland: Kluwer academic Publishers.

Brousseau, G., Brousseau, N., & Warfield, V. (2004). Rationals and decimals as required in the school curriculum Part 1: Rationals as measurement. *Journal of Mathemaical Behavior*, (s.1-20).

Carlgren, I. (2011). Kunnande-kunskap-kunnighet. i L. Lindström, V. Lindberg, & A. Pettersson, *Pedagogisk Bedömning. Att dokumentera, bedöma och utveckla kunskap.* HLS Förlag.

Carlgren, I. (2012). The Learning Study as an approach for clinical subject matter didactic research. *International Journals for Lesson and Learning Studies.*, 1 (2) 1-18.

Carlgren, I., & Marton, F. (2001). *Lärare av i morgon.* Stockholm: Lärarförbundets Förlag.

Cobb, P., & Yackel, E. (1996). Sociomathematical Norms, Argumentation, and Autonomy in Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27 (4) 458–477.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiment in educational research. *Educational Researcher*, 32 (1) 9-13.

Cohran-Smith, M., & Lytle, S. (1999). The teacher research movement: A decade later. *Educational Researcher*, 28 (5) 15-25.

Davydov, V. V. (1988). *Learning Activity: The Main Problems Needing Further Research.* Hämtat från ISCRAT Newsletter: www.iscar.org

Davydov, V. V. (1990). Types of generalization in Instruction: Logical and Psychological Problems in the Structuring of School Curricula. *Soviets Studies in Mathematics Education*.

Davydov, V. V. (2008/1986). *Problems of Developmental Instruction. A theoretical and experimental psychological study.* New York: Nova Science Publishers, Inc.

Davydov, V. V., & TSvetkovich, Z. (1991). On the Objective Origin of the Concept of Fractions. *Focus on Learning Problems in Mathematics,* 13 (1) 13-64.

Devlin, K. (January 2009). *Should Children Learn Math by Starting with Counting.* Hämtat från Devlins Angel: www.maa.org

Elliott, J. (1991). *Action research for educational change.* Milton Keynes: Open University Press.

Elliott, J. (2012). Developing a science of teaching through lesson study. *International Journal for Lesson and Learning Study*, 1 (2) 108-125.

Eriksson, I., Orlander, A. A., & Jedemark, M. (2005). *Varierande undervisningspraktiker i timplanelösa skolor - likvärdiga förutsättningar för elevers lärande?* Stockholm: Stockholms Universitets Förlag.

Erlwanger, S. (1973). Benny's Conception of Rules and Answers in IPI Mathematics. *Journal of Children's Mathematical Behaviour*.

Fernandez, C., & Yoshida, M. (2004). *Lesson Study: A Japanese Approch to Improving Mathematics Teaching and Learning.* Lawrence Erlbaum Associates.

Gustafsson, L. (2008). *Att bli bättre lärare. Hur undervisningsinnehållet blir till samtalsämne lärare emellan.* Umeå: Umea Universitet.

Hart, K. (1981). *Children's understanding of mathematics:* (s.11-16). London: Murray.

Hiebert, J., & Wearne, D. (1986). Procedures over Concepts: The acquisition of Decimal Number Knowledge. i J. Hiebert, *Conceptual and Procedural Knowledge; The case of Mathematics.* New Jersey: Erlbaum.

Holmqvist, M. (2006). *Lärande i skolan. Learing study som skolutvecklingsmodell.* Lund: Studentlitteratur.

Howden, H. (1989). Teaching Number Sense. *Arithmetic Teacher*, 36 (6) 6-11.

Isoda, & Nakamura. (2010). Mathematics Education Theories for Lesson Study: Problem Solving Approach and the Curriculum through Extension and Integration. *Journal of Japan Society of Mathematical Education*.

Johannessen, K. (2008). The concept of practice in Wittgensteins's later philosophy. *Inquiry: An Interdisciplinary Journal of Philosphy,* 31 (3) 357-369.

Johansson, B. (2004). *Matematikens historia.* Lund: Studentlitteratur.

Kieran, C. (2004). Algebraic Thinking in the Early Grades: What is it? *The Mathematics Educator*, 8 (1) 139-151.

Kieran, C. (2006). Research on the learning and teaching algebra. i A. Gutiérrez, & P. Boero, *Handbook of research on the psychology of mathematics education.* (s. 11-50). Rotterdam: Sense Publishers.

Kieren, T. (1988). Personal knowledge of rational numbers: Its intuitive and formal development. i J. Hiebert, & M. Behr, *Number-conceptions and operations in the middle grades* (s. 53-92). VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Kilhamn, C. (2011). *Making Sesne of Negative Numbers.* Göteborg: Utbildningsvetenskapliga fakulteten.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Bradford, F. (2001). *Adding it up. Helping children learn Mathematics.* NW: National Academy of Sciences.

Kinard, A., & Kozulin, A. (2012). *Undervisning för fördjupat matematiskt tänkande.* Lund: Studentlitteratur.

Kiselman, C., & Mouwitz, L. (2008). *Matematiktermer för skolan.* Göteborg: Livréna.

Kozulin, A. (1990). *Vygotsky's Psychology: A Biography of Ideas.* First Havard University Press.

Kozulin, A. (2003). Psychological Tools and Mediated Learning. i A. Kozulin, B. Gindis, V. S. Ageyev, & M. Miller, *Vygotsky's Educational Theory in Cultural Context* (s. 15-38). Cambridge: Cambridge University Press.

Kozulin, A., & Kinard Sr., J. T. (2008). *Rigorous Mathematical Thinking - Conceptual Formation in the Mathematics Classroom.* New York: Cambridge University Press.

Kullberg, A. (2010). *What is taught and what is learned. Proffesional insights gained and shared by teachers of mathematics.* Göteborg: Acta Universitatis Gothobugensis.

Kullberg, A., & Runesson, U. (2013). Learning about the numerator and denominator in teacher-designed lessons. *Mathematics Education Research Group of Australasia,* (25) 547-567.

Lamon, S. (2005). *Teaching Fractions and Ratios for Understanding: Essential Content Knowledge and Instructional Strategies for Teachers.* NY: Routledge.

Larsson, M., & Ryve, A. (2012). Balancing on the edge of competency-oriented versus procedural-oriented practices: orchestrating whole-class discussions of complex mathematical problems. *Math Education Research Journal*, (24) 447-465.

Larsson, S. (2005). Om kvalitet i kvalitativa studier. *Nordisk Pedagogik*, 25 (1) 16-35.

Larsson, S. (2009). A Pluralist View of Generalization in Qualitative Research. *International Journal of Research & Method in Education*, 32 (1) 25-38.

Leontiev, A. (1978). *The problem of activity and psychology*. Hämtat från Soviet Psychology: The Vygotsky Internet Archive. den 10 july 2013

Lindberg, V., & Löfgren, R. (2011). Bedömningshandlingar i två klassrum Likartat kemiinehåll men skillda klassrum. i E. I, *Kemiundervisning, text och textbruk i finlandssvenska och svenska skolor, en komparativ tvärvetenskaplig studie* (s. 238-274). Stockholm: Stockholms universitets förlag.

Ling Lo, M. (2012). *Variation Theory and the Improvement of Teaching and Learning*. Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis.

Löwing, M. (2010). *Grundläggande matematik.* Lund: Studentlitteratur.

Löwing, M., & Kilborn, W. (2010). *Kulturmöten i matematikundervisningen - exempel från 41 språk.* Lund: Studentlitteratur.

MacGregor, M., & Price, E. (1999). An Exploration of Aspects of Language Proficiency and Algebra Learning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30 (4) 449-467.

Mack, N. (1993). Learning Rational Numbers With Understanding: The Case of Informal Knowledge. i T. Carpenter, E. Fennema, & T. Romberg, *Rational Numbers. An Integration of Research* (s. 85-107). US: Lawrence Erlbaum Associates.

Malmer, G. (1988). *Matematik - ett ämne att räkna med.* Solna: A & W Läromedel.

Malmer, G. (1990). *Kreativ matematik.* Solna: Ekelunds förlag.

Marton, F. (2014). *Necessary Conditions of Learning.* NY: Routledge.

Marton, F., & Booth, S. (1997). *Learning and awareness.* New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Marton, F., & Tsui, A. (2004). *Classsoom Discourse and the Space of Learning.* Mahwah: Erlbaum.

Marton, F., Runesson, U., & Tsui, A. (2004). The spece of learning. i F. Marton, & A. Tsui, *Classroom discourse and the space of learning* (s. 3-40). Mahwah, N.J: Erlbaum.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. i N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee, *Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching* (s. 65-86). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

McIntosh, A. (2008). *Att förstå och använda tal.* Göteborg: NCM.
Morris, A. (2000). A Teaching Experiment: Introducing Fourth Graders to Fractions from the Viewpoint of Meassuring Quantities Using Davydov´s Mathematical Curriculum. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, (s. 32-84).
Niemi, D. (1996). Assessing Conceptual Understanding in Mathematics: Representations, Problem Solutions, Justifications and Explanations. *The Journal of Educational Research*, 89 (6) 351-363.
Olive, J. (2011). Fractions on a dynamic number line. *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3) 289-296. Ankara: PME.
Olsson, S. (1999). *Matematiska nedslag i talens värld.* Solna: Ekelund.
Pang, M., & Marton, F. (2003). Beyond "lesson study". Comparing two ways of facilitate. *Instructional Science,* (31) 175-194.
Polanyi, M. (1963). *Tacit knowledge.* Terry lectures.
Polya, G. (1945). *How to solve it!* Princeton, NJ: Princeton University Press.
Repkin, V. (2003). Developmental Teaching and Learning Activity. *Journal of Russian and East European Psychology,* 41 (5) 10-33.
Resnick, L., & Singer, J. (1993). Protoquantitative Origins of Rational Reasoning. i T. Carpenter, E. Fennema, & T. Romberg, *Rational Numbers. An Integration of Research* (s. 107-131). US: Lawrence Erlbaum Associates.
Reys, B. (1991). *Developing number sense in the middle grades: Addenda series grades 5-8.* VA: National Council of Mathematics.
Roth, W.-M., & Hwang, S. W. (2006). Does mathematical learning occur in going from concrete to abstract or going from abstract to concrete? *Journal of Mathematical Behavior*, (25) 334-344.
Roth, W.-M., & Radford, L. (2011). *A Cultural-Historical Perspective on Mathematics Teaching and Learning.* Rotterdam: Sense Publisher.
Runesson, U. (1999). *Variationens pedagogik: Skilda sätt att behandla ett matematiskt innehåll.* Göteborg: Acta Universitatis Gothobugensis.
Runesson, U. (2006). What is possible to learn? Variation as a necessary condition for learning. *Scandinavian Journal of Educational Research*, 50 (4) 397-410.
Rönnerman, K. (2011). Aktionsforskning-kunskapsproduktion i praktiken. *Forskning om undervisning och lärande*, (5) 50-62.
Sackur-Grisvard, C., & Léonard, F. (1985). Intermediate cognetive organizations in process of learning a mathematical concept: The order of positive decimal numbers. *Cognition and instruction*, 2 (2) 157-174.
Schmittau, J. (2003). Cultural-Historical Theory and Mathematics Education. i I. Kozulin, B. Gindis, V. Ageyey, & M. Miller, *Vygotsky´s educational theory in cultural context* (s. 225-245). Cambridge: Cambridge University Press.

Schmittau, J. (2004). Vygotskian theory and mathematics education. *European Journal of Psychology of Education*, 19-43.

Schmittau, J. (2005). The Development of Algebraic Thinking - A Vygotskian Perspective. *Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik ZDM*, 37 (1) 16-22.

Schmittau, J., & Morris, A. (2004). The development of Algebra in the Elementary Mathematics Curriculum of V.V. Davydov. *The Mathematics Educator*, 8 (1) 60-87.

Sfard, A. (1998). On Two Metaphors for Learning and the Dangers of Choosing Just One. *Educational Reseacher*, 27 (2) 4-13.

Skemp, R. (1976). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *Mathematics Teaching*, (77) 20-26.

Skolverket. (2011). *Läroplan för grundskolan, förskoleklassen och fritidshemmet 2011*. Hämtat från Skolverket: http://www.skolverket.se/laroplaner-amnen-och-kurser/grundskoleutbildning/grundskola/laroplan den 28 januari 2014

Skolverket. (1962, 1969,1980,1994). *Kursplaner Grundskola - obligatoriska skolväsendet / Tidigare kursplaner*. Hämtat från http://ncm.gu.se/node/3605#gam den 28 januari 2014

Sophian, C., Garyantes, D., & Chang, C. (1997). When three is less than two: Early developments in children's understanding of fractional quantities. *Developmental Psychology*, (33) 731-744.

Steffe, L. P., & Olive, J. (2010). *Children's Fractional Knowledge.* NY: Springer.

Stenhouse, L. (1981). What counts as research? *British journal of educational studies*, 29 (2) 103-114.

Stigler, J. W., & Hiebert, J. (1999). *The Teaching Gap.* New York: The Free Press.

Streefland, L. (1993). Fractions: A Realistic Approach. i T. P. Carpenter, E. Fennema, & T. A. Romberg, *Rational Numbers. An Integration of Research* (s. 289-327). Hillsdale: Lawrence Erlbaum.

Säljö, R. (2000). *Lärande i praktiken ett sociokulturellt perspektiv.* Stockholm: Norstedts förlag.

Taflin, E. (2007). *Matematikproblem i skolan - för att skapa tillfällen till lärande.* Umeå: Department of Mathematics and Mathematics Statistics.

Usiskin, Z. (1888). Concept of school algebra and uses of variable. i A. F. Coxford, & A. P. Shulte, *1988 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics. The ideas of algebra, K-12* (s. 8-19). Reston: NCTM.

Van Dijk, I., van Oers, B., Terwel, J., & van den Eeden, P. (2003). Strategic Learning in Primary Mathematics Education: Effects of an

Experimental Program in Modelling. *Educational Research and Evaluation*, 9 (2) 161-187.

Van Oers, B. (2001). Educational Forms of Initiation in Mathematical Culture. *Educational Studies in Mathematics*, (46) 59-85.

Veneciano, L., & Dougherty, B. (2014). Addressing priorities for elementary school mathematics. *For the Learning of Mathematics*, (34) 1.

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative Structures. i J. Hiebert, & B. Behr, *Number Consepts and Operations in the Middle Grades* (s. 141-161). Reston, VA: NCTM.

Wernberg, A. (2009). *Lärandets objekt. Vad elever förväntas lära sig och vad görs möjligt för dem att lära och vad de faktiskt lär sig under lektionerna.* Kristiansstad: Högskolan Kristiansstad.

Wertsch, J. (1998). *Mind as action.* Oxford: Oxford University Press.

Vetenskapsrådet. (2011). *Forskningsetiska principer inom humanistisk-samhällsvetenskaplig forskning.* Stockholm: Vetenskapsrådet.

Vosniadou, S., Vamvakoussi, X., & Skopeliti, I. (2008). The framework theory approach to the problem of conceptual change. i S. Vosniaduou, *International handbook of research on conceptual change* (s. 3-34). New York: Routledge.

Vygotsky, L. (1934). *Thinking and Speech*. Hämtat från Soviet Psychology: The Vygotsky Internet Archive. den 10 july 2013

Vygotsky, L. (1963/1934). Learning and development at school age. i B. Simon, & J. Simon, *Educational psychology in the U.S.S.R.* (s. 21-34). London: Rutledge & Kegan Paul.

Zuckerman, G. (2004). Development of reflection through learning activity. *European Journal of Psychology of Education*, XIX (1) 9-18.

Zuckerman, G. (2007). Supporting Children's Initiative. *Journal of Russian and East European Psychology*, 45 (3) 9-42.

Webbsidor:
http://codex.vr.se/manniska1.shtml
www.inqscribe.com
http://www.libris.kb.se
http://www.googlescholar.com.