Algoritmiska, intuitiva och formella aspekter av matematiken i dynamiskt samspel

En studie av hur studenter nyttjar sina begreppsuppfattningar inom matematisk analys

Kerstin Pettersson
Biträdande lektor, Stockholms universitet

www.math.chalmers.se/Math/Research/Preprints
(välj Doctoral Dissertations)

Presentation av mig

- Gymnasielärare i matematik och fysik
- Högskolan i Skövde
- Forskarskolan i matematik med ämnesdidaktisk inriktning
- Disputerade 2008 i Göteborg

Två studier

- Intervjuer av ingenjörsstudenter om begreppen gränsvärde och integral
- Observation av hur en grupp matematikstudenter arbetar med ett problem (funktioner och derivata)

Artiklar i avhandlingen

Artikel 1
Pettersson, K., & Scheja, M. (2008). Algorithmic contexts and learning potentiality: A case study of students' understanding of calculus. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 39(6), 767-784.*

Artikel 2
Scheja, M., & Pettersson, K. (in press). Transformation and contextualisation: conceptualising students' conceptual understandings of threshold concepts in calculus. *Higher Education.*

Artikel 3
Pettersson, K. (2008). Växelverkan mellan intuitiva idéer och formella resonemang - En fallstudie av universitetsstudenters arbete med en analysuppgift. *Nordic Studies in Mathematics Education, 13(1), 29-50.*

Syfte och forskningsfrågor

Att studera universitets- och högskolestudenters begreppsuppfattningar inom matematisk analys så som de kommer till uttryck i deras arbete med ett matematiskt material.

- Hur kontextualiserar studenter begrepp inom matematisk analys?
- Vilken dynamik finns mellan olika kontextualiseringar?

Kontext:
Den kognitiva struktur som aktualiseras hos individen i den uppkomna situationen

Intuition
En slags kognition som ger möjlighet till en omedelbar uppfattning där alla delar uppfattas direkt och tillåter resonemang utan att man behöver vila på det formella
(Fischbein, 1987)

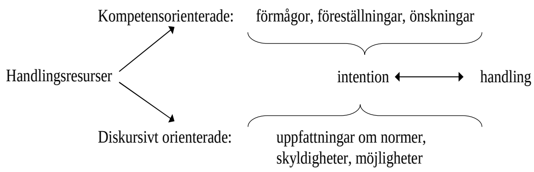
Formella resonemang
Logiska slutledningar som vilar på formella definitioner och satser

Algoritmisk kunskap
Kunskap om räkneregler och procedurer.
Inkluderar även studenters förmåga att beskriva och använda dessa regler och procedurer

Intentionell analys

- **intentionalitet** ett grundantagande
- **systematisering** av tolkande verksamhet
- försöker svara på **varför** individen agerade på visst sätt
- en **modell** för agerandet

Sammanvägning av kognitiva och diskursiva aspekter



(efter Halldén, Haglund & Strömdahl, 2007, s. 29)

Intentionell förklaring genom en praktisk inferens

Premiss 1:	P vill/önskar/avser att åstadkomma x.
Premiss 2:	P tror att han kan åstakomma x genom att göra y.
Slutsats:	Därför; P gör y.

(efter Halldén, 2001, s. 10)

Intervjustudien

- Samarbete med Max Scheja
- 20 studenter på ingenjörsutbildning
- Har läst en kurs i matematisk analys
- Skriftligt förklara innebörden i begreppen gränsvärde och integral
- Skatta sin egen förståelse
- Intervjuer med fyra av studenterna

Förklara så klart och tydligt som möjligt innebörden i det matematiska begreppet GRÄNSVÄRDE

(Använd gärna figurer men beskriv i ord vad de föreställer.)

Förklara så klart och tydligt som möjligt innebörden i det matematiska begreppet INTEGRAL

(Använd gärna figurer men beskriv i ord vad de föreställer.)

Skatta din förståelse för begreppen

Hur bra tycker du själv att du förstår innebörden i begreppet GRÄNSVÄRDE?

Hur bra tycker du själv att du förstår innebörden i begreppet INTEGRAL?

Inte alls bra
Mindre bra
Varken bra eller dåligt
Ganska bra
Mycket bra

Teorier om begreppsutveckling:

- **Conceptual change**
  - provisorisk förståelse byts mot mer vetenskaplig (Vosinadou, 1994)
- **Differentiering mellan kontexter**
  - att lära sig välja en förklaring lämplig i situationen (Halldén, 1999)

Concept image

- Tall och Vinner, 1981
- ”den kognitiva struktur som är associerad med ett begrepp”
- Består av individens tolkningar och förståelse av begreppet

Concept image

- Innefattar alla egenskaper och processer som individen förknippar med begreppet
- Innefattar även mentala bilder t.ex. figurer och grafer som förknippas med begreppet
- Byggs upp successivt genom individens möte med begreppet

Concept image

- Innefattar intuitiva idéer om begreppet om individen har sådana
- Innefattar begreppets formella definition förutsatt att individen kan denna
- Innefattar även individens tolkning av definitionen
- Olika delar av individens concept image aktualiseras i olika sammanhang

Process – objekt

- Aktion, Process, Objekt, Schema
  (Dubinsky, 1991)
- Övergång från process till objekt - reifikation
  (Sfard, 1991)
- ”Procept”
  (Grey & Tall, 1994)

Konceptuella och procedurella kunskaper

Hiebert (1986) skiljer på två typer av kunskap

- *Konceptuell kunskap*
  - rik på kopplingar
  - utgör en sammanhängande väv av kunskap
- *Procedurell kunskap*
  - kunskaper om regler och procedurer

Relationell och instrumentell förståelse

Skemp (1976) skiljer på två typer av förståelse

- *Instrumentell förståelse*
  - vet hur något ska göras
  - individen har endast procedurella kunskaper
- *Relationell förståelse*
  - vet både vad som ska göras och varför
  - individen har både konceptuella och procedurella kunskaper

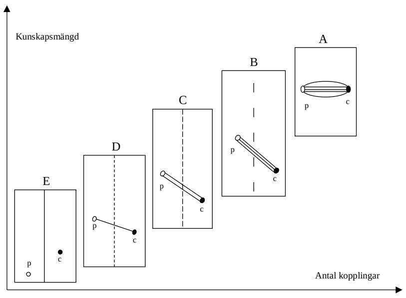
Alternativ definition av Star (2005)

- Konceptuell kunskap
  - *kunskap om begrepp och principer*
- Procedurell kunskap
  - *kunskap om regler och procedurer*

Båda kunskapstyperna kan vara djupa eller svaga:

- *Djup procedurell kunskap*
  = rik och väl sammanhängande kunskap om procedurer
- *Svag konceptuell kunskap*
  = ytlig och osammanhängande kunskap om begrepp och principer

Modell för utveckling av procedurell och konceptuell kunskap (efter Baroody, Johnson & Feil, 2007, s. 124)



p = procedurella kunskaper
c = konceptuella kunskaper

Modell för utveckling av procedurell och konceptuell kunskap (efter Baroody, Johnson & Feil, 2007, s. 124)

- E. Svaga procedurella och konceptuella kunskaper utan kopplingar dem emellan.
- D. Viss procedurell kunskap och svag konceptuell kunskap med få och svaga kopplingar dem emellan.
- C. Relativt djup procedurell kunskap och relativt svag konceptuell kunskap med viss koppling dem emellan.
- B. Djupa procedurella och relativt djupa konceptuella kunskaper som är kopplade till varandra.
- A. Djupa procedurella och konceptuella kunskaper som är fullt integrerade.

Missuppfattning eller försteg?

- Mycket forskning visar på att elever/studenter har andra uppfattningar än de förväntade
- En del forskare menar att dessa föreställningar utgör försteg (ex. Sierpinska, 1992; Tall, 1992)
- Intressant att studera den potential som uppfattningarna har

Tröskelbegrepp

- Meyer & Land, 2003
- Begrepp som kan fungera som en portal till ett tidigare onåbart sätt att tänka
- Karakteriseras av att vara transformativa, integrativa och irreversibla
- Exempel: Gränsvärde

Forskning om gränsvärde

- Gränsvärde ses som barriär eller sista term i en process
- Fokuserar på rörelsen mot gränsvärdet
- Kopplas till diskontinuitetspunkter
- Svårt steg att se gränsvärde som objekt
- Inte så användbart
- Algebraiska manipulationer

(Artigue, 2001; Cornu, 1991; Juter, 2006)

Forskning om integral

- Integraler uppfattas som en procedur
- Algebraiska lösningsmetoder favoriseras före geometriska
- Uppfattning om förändringshastighet behövs för att koppla sambandet integral – area genom huvudsatsen
- Uppfattar inte integralen som gränsvärde utan ser integralen som en approximation
- Problematisk övergång från intuitivt areabegrepp till formell hantering av integralbegreppet

(Artigue, 2001; Orton, 1983)

Studenternas skriftliga svar

- Bedömdes med kriterier baserade på tidigare forskning
- Utveckling från process via objekt till ”procept”
- Formell hantering ett strävansmål
- Integral både som area och derivatans omvändning

Kriterier för bedömning

Gränsvärde:

0. Innehåller inget med relevans för det matematiska begreppet
1. Bygger endast på enstaka exempel
2. Utrycker gränsvärde som en process
3. Uttrycker gränsvärde som ett objekt
4. Anger gränsvärde både som process och objekt
5. Inkluderar formell behandling, t.ex. definitionen i någon form

Integral:

0. Innehåller inget med relevans för det matematiska begreppet
1. Bygger endast på enstaka exempel
2. Anger en av aspekterna omvänd derivata respektive area
3. Anger båda aspekterna omvänd derivata respektive area
eller anger både area och areaberäkning genom indelning i staplar.
4. Anger båda aspekterna area och omvänd derivata samt antyder definitionen (Riemannsumma/gränsvärde)
5. Inkluderar formell behandling, t.ex. integralens definition.

Studenternas förståelse bedömd utgående från de skriftliga utsagorna

Bedömning	0	1	2	3	4	5
Gränsvärde[1]	2	5	8	3	1	-
Integral[2]	-	10	7	2	-	-

[1] En av studenterna besvarade inte frågan.
[2] En av studenterna besvarade inte frågan.

Studenternas egen skattning av sin förståelse

Skattning	Inte alls bra	Mindre bra	Varken bra eller dålig	Ganska bra	Mycket bra
Gränsvärde	2	3	6	7	2
Integral	1	3	5	9	2

Studenters uttalanden i intervjuerna

- ”*jag försöker förstå hur man löser saker och ting*”
- ”*jag går inte runt och grubblar över varför det är si eller så*”
- ”*... det här med definitioner brukar jag inte lära mig utantill, tyvärr…*”.

Algoritmisk kontext

- talar om hur begreppen används
- operationerna definierande egenskaper
- procedurella kunskaper
- funktionellt för studenterna

I: Alla integraler är de areaberäkningar, och alla areaberäkningar är de integraler…?

Philip: Nej.

[…]

Philip: Det är ju när integralen…
…om man till exempel…
… eller ja i och för sig. Om man har en…
Om du har ett sånt här hörn eller nånting…
… fast i och för sig kan du ju då räkna ut för det där…
… och räkna olika areor och sen lägga ihop dom. …
Nu måste jag fundera om man kan göra det på alla integraler, det har jag aldrig tänkt på…

Algoritmisk begreppsuppfattning - försteg till en mer fullödig förståelse?

- studenterna har kunskaper utanför algoritmisk kontext
- studenterna skiljer på algoritmisk kontext och begreppslig
- provocerande frågor startar ihopkoppling

Hur tas begreppen upp i läroböcker?

- I kursböcker för gymnasiet?
- I kurslitteratur för högskolan?

Johan Lithner, Umeå universitet

- Undersökning av uppgifter i läroböcker för universitetskurs (tre calculus-böcker)
- 70% kan lösas genom att söka i texten efter metod
- 20% kräver lokalt kreativt resonemang
- 10% kräver kreativt resonemang (märkta som svåra)

Studie av studenter som arbetade med uppgifterna

- 95% en satsning på ytlig jämförelse
- 5% en satsning på lokalt kreativt resonemang

Jesper Boesen (2006)

- Jämförelse mellan nationella prov och prov konstruerade av lärarna själva
- Egna proven innehåller mer imitativa resonemang

- Vilken typ av kunskap vill vi att eleverna ska ha?
- Hur kan vi skapa lärsituationer så vi stödjer detta lärande?

Problemlösningsstudien

- grupper av studenter arbetat med en utmanande uppgift
- studenter från ett matematikprogram
- har läst nästan ett år matematik

Uppgiften:

Låt f vara en funktion definierad på hela **R**.

a) Hur många nollställen kan funktionen högst ha om för alla x gäller att $f'(x) \neq 0$?

b) Om istället $f''(x) \neq 0$, vad gäller då för antalet nollställen till funktionen?

c) Om vi istället har $f^{(n)}(x) \neq 0$, vad kan då sägas om antalet nollställen till funktionen?

Använd induktion för att bevisa ert påstående.

Forskning om elevers uppfattningar av funktionsbegreppet

Funktioner kan uppfattas på flera olika sätt:

- en operation som från ett tal ger ett annat tal
- en korrespondens mellan två variabler
- en formel
- ett algebraiskt uttryck
- en graf

(Vinner & Dreyfus, 1989)

Forskning om elevers uppfattningar av funktionsbegreppet

- Svårt att överföra förståelse från en tolkning av funktionsbegreppet till en annan.
- Algebraisk hantering favoriseras.
- Utnyttjar inte visualisering så mycket.

(Eisenberg, 1991)

Forskning om elevers uppfattningar av funktionsbegreppet

- Vanlig uppfattning att kräva att
  - funktionen ges genom en formel
  - formeln innefattar en variabel

(Ferrini-Mundy, 1994)

- Funktioner introduceras ofta som process. Övergång till objektifierad form svår.

(Sfard, 1991; Hansson, 2006)

Faculty of Science

Forskning om elevers uppfattning av derivata

- Derivata som tangent vanligaste förklaringsmodellen
- Tangentens ekvation förväxlas ibland med derivatan
- Derivatan blandas ihop med funktionens värde i tangeringspunkten
- Procedurella kunskaper dominerar
- Svårt att relatera de algebraiska metoderna till grafiska tolkningar

(Artigue, 1991; Amit&Vinner, 1990; Orton, 1983; Tall, 1992; Ferrini-Mundy&Graham, 1994)

Faculty of Science

Forskning om elevers uppfattning av derivata

- Svårt att förstå gränsprocessen
- Uppfattning att derivata ges av algebraisk manipulation gör att gränsvärdet upplevs onödigt
- Uppgifterna kan lösas utan definitionen
- Svårigheter att koppla gränsvärdet i definitionen till gränsprocessen som ger tangenten (gränsvärdet av sekanternas lutning)

(Tall, 1992; Hähkiöniemi, 2006; Zandieh, 1999)

Faculty of Science

Forskning om elevers uppfattning av derivata

- Många undervisningsförsök har gjorts där grafritare eller dataprogram använts för att introducera och bearbeta begreppet
- De konceptuella kunskaperna förbättras med dessa metoder
- Tidskrävande och arbetsamt för eleverna
- Viss försämring av formella kunskaper

(Asiala et al, 1997; Habre&Abboud, 2006; Tall, 1996)

Faculty of Science

Forskning om elevers uppfattning av derivata

Sammanfattning:

- Flera konceptuella svårigheter kopplade till derivata-begreppet
- Elevers sätt att förhålla sig till svårigheterna verkar vara att fokusera på procedurella kunskaper

Faculty of Science

Studenternas arbete

- Formulerar korrekt hypotes
- Har god kunskap om induktionsbevis
- Har svårt att hitta passa in i mönster
- Om derivatan har *m* nollställen så kan funktionen ha högst *m*+1 nollställen
- Om *p*:te derivatan har högst *m* nollställen så har (*p*-1)-derivatan högst *m*+1 nollställen
- Om *p*:te derivatan är skild från noll så har funktionen högst *p* nollställen

Faculty of Science

Diana: *Men fortfarande, hur kan vi visa det? Vi kan derivera den där liksom, så får vi den där* (pekar i Carls anteckningar på $f^{(n)}(x) \neq 0$ respektive $f^{(n+1)}(x) \neq 0$)

Carl: *Mm.*

Diana: *Ja.*

Carl: *Ja, precis.*

Carl: *Och så, antingen är det färdigt eller så är det jättesvårt.* (skratt)

Beth: *Ja, vi har väl principen hur det liksom ska fungera…*

Diana: *Om den är skild från noll, vad innebär det då för derivatan? Och om **funktionen** är skild från noll, vad innebär det då? … om derivatan?*

Carl: *Nej, just det…*

Diana: *Det säger ju ingenting, eller liksom, det säger ju…*

Carl: *Nej det säger ju inte någonting…*

Beth: *Nej, det kunde högst vara ett nollställe, men den kanske inte har något nollställe liksom, och derivatan ändå…*

Diana: *Nej.*

Alex: *Men, men...*

Alex: *Det säger väl visst någonting, om en funktion är…*

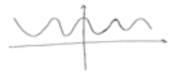
Diana: *Nej.*

Alex: *… skild från noll då säger det att, då korsar den inte…*

Beth: *Nej, den korsar inte.*

Alex: *Den korsar inte. Och då måste den vara antingen växande eller avtagande.*

Diana: *Den kan väl gå så här?* (ritar) *x-axeln kan ju alltid ligga under, det säger ju ingenting, funktionen kan ju hoppa och ha sig lite hur som helst här.*



Intuitiva idéer och formaliseringskrav

- Har och använder intuitiva idéer för funktion och derivata
- Ställer stora krav på formalisering av sina idéer
- Väl förtrogna med mall för induktionsbevis och vidhåller denna kraftigt
- Växlar mellan intuitiva idéer och formella resonemang
- Provocerande påståenden från gruppmedlemmar ger växlingar

Växlingar

- för att få stöd och kontrollera idéer
- för att få nya utgångspunkter
- för att reducera komplexitet
- för att driva problemlösningsprocessen

Slutsatser från studierna

- Algoritmisk kontext dominerande på inledande kurser
- Matematikstudenter kan utnyttja en formell kontext där intuitiva idéer utgör viktiga inslag
- Provocerande frågor initierar kontextväxlingar
- Förståelse av tröskelbegreppen kräver växlingar?

Kerstin Pettersson

Institutionen för matematikämnets och naturvetenskapsämnenas didaktik

Stockholms universitet

kerstin.pettersson@mnd.su.se

Avhandlingen i pdf finns på

www.math.chalmers.se/Math/Research/Preprints

(välj Doctoral Dissertations)