Räkna med bokstäver!

Konsekvenser för matematikundervisningen

Per-Eskil Persson

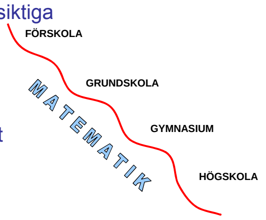
Stockholm 17 november 2011

Är påståendena riktiga? 1

- I Sverige har vi ett växande problem med allt sämre resultat på nationella prov i matematik och i internationella undersökningar som TIMSS och PISA.
- Detta kan motverkas av att man arbetar mer elevaktivt i matematikundervisningen. Eleven får i egen takt tillägna sig matematiska begrepp och metoder, och läraren får mer rollen av coach och hjälpare när eleven kör fast.

Är påståendena riktiga? 2

- Det är viktigt att man på den enskilda skolan skriver lokala kursplaner i matematik och har egna bedömnings- och betygskriterier.
- Man måste tänka på det långsiktiga lärandet när man planerar matematikundervisningen, och ett samarbete mellan skolor för olika åldersgrupper av elever är nödvändigt för att skapa en ”röd tråd”.



Är påståendena riktiga? 3

$(3x – 5)(2x + 1) = 6x^2 – 7x – 5$

$7x – 34 = 6 – 3x$

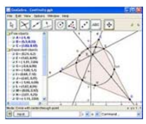
- När eleverna börjar på gymnasiet, måste de behärska förenklingsalgebra och ekvationslösning för att lyckas med matematiken på exempelvis naturvetenskaps-programmet.
- Viktigast är att eleverna har en god taluppfattning och till största delen behärskar aritmetiken, plus att de har fått stifta bekantskap med bokstavssymboler och förstår innebörden av dem i olika situationer.

Är påståendena riktiga? 4



- Barn har förmågan till abstrakt tänkande kring exempelvis variabler och relationer mellan storheter redan tidigt i skolan. Det är möjligt att starta med bokstavssymboler redan i de första skolåren.
- Ungefär i skolår 5-6 är elever mogna för att introduceras till algebra och bokstavssymboler. Innan dess finns det utvecklingsmässiga hinder för deras förståelse av en mer abstrakt matematik.

Är påståendena riktiga? 5

- Användningen av miniräknare och datorer på lektionerna har en skadlig inverkan på elevernas förståelse för matematiken och på deras förmåga att göra beräkningar för hand eller i huvudet.
- Med hjälp av räknare och datorprogram kan elever få en djupare förståelse för matematiska begrepp och klarar även svårare problemlösning. Deras förmåga att räkna för hand och i huvudet försämras inte.

Är påståendena riktiga? 6

- En behörig matematiklärare har så mycket kunskaper i matematik och matematikdidaktik med sig, att det inte behövs någon ytterligare fortbildning inom ämnet. Istället är det andra viktiga frågor som måste behandlas inom kompetensutvecklingstiden.
- Det är nödvändigt för alla matematiklärare att regelbundet delta i fortbildning inom ämnet och även att få möjlighet till vidareutbildning. Och en satsning på utvecklingsarbeten inom matematiken är ett sätt att höja kvaliteten på undervisningen och därmed resultaten.

Forskningsprojekt 1998-2010

- Utvecklingsprojekt 1998 på min egen skola tillsammans med min kollega Tomas Wennström: *Gymnasieelevers algebraiska förmåga och förståelse.*
- Vidareutbildning inom matematikdidaktik.
- Med hjälp av stipendier en fortsättning på projektet fram till 2003.
- Antagen till forskarutbildning vid Luleå tekniska universitet 2003.
- Licentiatexamen 2006. Doktorsexamen i *Matematik och lärande* 2010: *Räkna med bokstäver! En longitudinell studie av vägar till en förbättrad algebraundervisning på gymnasienivå.*

Allmänt om avhandlingen

- Tre artiklar med en kappa som binder samman dem och sätter in dem i ett större sammanhang.
  - *The teacher as researcher: Teaching and learning algebra.*
  - *Understanding relations between variables: Revisiting a "node" in the development of algebraic thinking.*
  - *Handheld calculators as tools for students' learning of algebra*
- En längre översikt över den aktuella forskning i vilken min avhandling kan placeras in.
- Teorierna sammanbinds till en helhetsbakgrund för mitt forskningsprojekt.
- Viktiga implikationer för undervisningen formuleras.
- Kappan är medvetet skriven på svenska, medan artiklarna samtliga är på engelska.

Vad gör studien speciell?

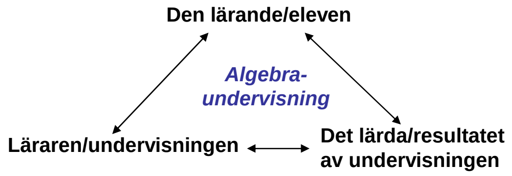
- Bred studie av algebralärande på gymnasienivå.
- Initierad inifrån verksamheten och med ett uttalat lärar- och undervisningsperspektiv.
- Longitudinell undersökning, där elever följs genom hela utbildningsnivån.
- En stor mängd forskning kring algebralärande presenteras och systematiseras.
- Studier kring användning av teknologiska verktyg som räknare eller datorprogramvara är få i Sverige.
- Skildringen av min egen utveckling från att vara lärare till att även vara forskare är ovanlig.

Syften och mål

- Skapa en övergripande bild av algebrakunskaperna hos en grupp elever på det naturvetenskapliga programmet i en vanlig svensk skola.
- Visa hur dessa kunskaper utvecklas under elevernas tre år på gymnasiet och identifiera några viktiga faktorer för hur utvecklingen sker.
- Med hjälp av studiens resultat föreslå olika vägar till en förbättrad algebraundervisning, främst inom gymnasiet men även inom utbildningssystemet i sin helhet.
- Reflektera över hur vidareutbildning av en lärare kan utveckla henne/honom professionellt och personligt.

Övergripande frågeställningar

- Den didaktiska triangeln:



Den lärande/eleven

- Vilka föreställningar har elever på gymnasienivå om det matematiska området algebra, om algebraiska begrepp, symboler och representationsformer samt om algebraiska aktiviteter?
- Vilka exempel på hinder för den lärandes begreppsutveckling kan urskiljas, och vilka möjligheter till att avhjälpa dessa hinder visar sig tänkbara?
- Hur kan affektiva faktorer som motivation, självförtroende och självkänsla påverka elevernas lärande?

Läraren/undervisningen

- På vilka sätt kan lärares uppfattning och kunskap om algebrans natur, algebraiskt tänkande och algebraiska aktiviteter skapa förutsättningar för ett stärkande och en förändring av undervisningen?
- Hur kan en vidareutbildning av en praktiserande lärare till att även kunna forska på sin egen undervisning bidra till att stärka och förändra algebraundervisningen?
- Vilka förändringar i algebraundervisningens innehåll, metoder och arbetssätt kan införandet av teknologiska verktyg som räknare medföra?

Det lärda/resultatet av undervisningen

- Vilka exempel på resultat av undervisningen, i form av hur den lärandes begrepps- och färdighetsutveckling inom algebra fortskrider över en längre tidsperiod, kan spåras?
- Vilka algebraiska kunskaper kan anses vara stabila över tid, dvs har internaliserats i den lärandes begreppsvärld?
- Vilka former av förändringar vid införandet av algebra, i de algebraiska aktiviteter som utförs, av de kognitiva verktyg som används samt vad algebraundervisningen fokuserar på, ger möjlighet för förbättringar av undervisningens resultat och konsekvenser?

Tidigare forskning 1

- Algebraundervisning i ett multidimensionellt perspektiv:
  - Aritmetik ↔ algebra
    - Aritmetiken som en del av och ett specialfall av algebran
    - Tidig algebra, Carraher & Schliemann (2007), Dougherty (2007)
  - Symbolernas betydelse: variabler och uttryck
    - Semiotik, Steinbring (2006), Radford, Bardini & Sabena (2007)
    - Okänt tal, generaliserat tal, tal i funktionssamband, Ursini & Trigueros (2001)
    - Parametrar, Drijvers (2003)
  - Uttryck, procedurer och struktur
    - Process-objekt, procept, Sfard & Linchevski (1994), Gray & Tall (2007)
    - Strukturkänsla, Boero (2001), Hoch & Dreyfus (2004)

Tidigare forskning 2

- Likhet, likhetstecken och ekvationer
  - Likhetstecknets roller, Knuth, Stephens, McNeil & Alibali (2006), Kieran (2007)
  - Definitionen av ”ekvation”, Godfrey & Thomas (2008)
  - Ekvationssystem, Filloy, Rojano & Solares (2004)
- Speciella svårigheter med algebra
  - Elevers uppfattningar om symbolerna, Küchemann (1981)
  - Ekvationslösning, ”the didactical cut”, Filloy & Rojano (1989)
  - Problemlösning med algebra, Drijvers (2003)
- Vägar till algebra
  - Generaliseringsvägen, problemlösningsvägen, funktionsvägen, Bednarz, Kieran & Lee (1996), Mason (1996), Zazkis & Lijedahl (2002), Mayfield & Glenn (2008)

Tidigare forskning 3

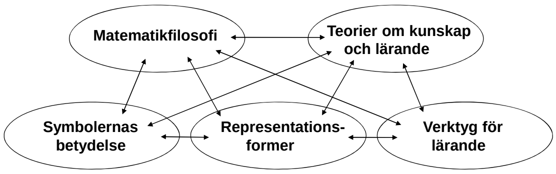
- Funktionsvägen till algebrakunskaper.
  - Utvecklingen av funktionsperspektivet, Kieran (2006, 2007)
  - Yngre barn, Blanton & Kaput (2004), Carraher, Scliemann & Brizuela (2006)
  - Transformationer mellan representationsformer, Janvier (1987)
- Teknologiska verktyg i undervisningen.
  - Kognitiva verktyg, Heid (1997)
  - Större studier, Lagrange m.fl. (2003), Zbiek m.fl. (2007)
  - Betydelse för algebraförståelse, Graham & Thomas (2000), Bardini, Pierce & Stacey (2004), Kieran & Saldanha (2005, 2008)
  - Lärares användning av grafritande verktyg, Ruthven, Deaney & Hennessy (2009)

Tidigare forskning 4

- Betydelsen av lärares och elevers uppfattningar och känslor.
  - Affektiva faktorers betydelse, Hannula (2002, 2005)
  - Förväntningar på matematikundervisning, Pehkonen (2001)
  - Läraren som "orkestrator", Artigue (2005)
  - Lärarens sätt att framställa algebra i undervisningen, Harel, Fuller & Rabin (2008), Chazan m.fl. (2008)
  - Lärarens uppfattningar och känslor, Philipp (2007)
- Algebraundervisning på gymnasienivå i ett nordiskt perspektiv.
  - Bergqvist (2001), Grevholm (2003), Hansson (2006), Jakobsson-Åhl (2006), Olteanu (2007), Häggström (2008)
  - Blomhøj (2001), Balling (2003), Winsløw (2004), Andresen (2006),

Teoretiskt ramverk

- Huvuddelarna i ramverket:



Delarna i ramverket

- Matematikfilosofi:
  - Matematik som vetenskap och algebrans plats (Lakatos), matematikfilosofiska reflektioner för undervisning.
- Teorier om kunskap och lärande:
  - Socialkonstruktivism och sociokulturell teori (Ausubel, Novak), didaktiska situationer, didaktiska kontraktet (Brousseau).
- Symbolernas betydelse:
  - Semiotiskt perspektiv (Radford, Steinbring), process-objekt (Sfard, Gray & Tall), matematikens tre världar (Tall)
- Representationsformer
  - Transformationer (Janvier), register (Duval)
- Verktyg för lärande
  - Artefakter (Wartofsky), instrumentell genesis (Trouche), teknologiska verktyg (Drijvers, Artigue)

Metoder

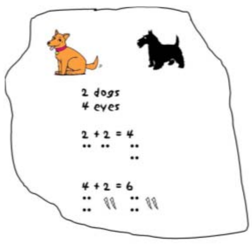
- 4 huvudfaser:
  - den empiriska grundstudien (delvis presenterad i min licentiatavhandling)
  - reflektion kring min egen roll som lärare och forskare (artikel 1)
  - fördjupning av delstudien kring ett funktionssamband (artikel 2)
  - utvidgning till de teknologiska verktygens roll (artikel 3)

Exempel 1: Funktioner för yngre barn

- Blanton & Kaput (2004) undersökte hur barn i förskolan (3-5 år) och i de första skolåren (6-11 år) upptäcker och uttrycker funktionssamband.

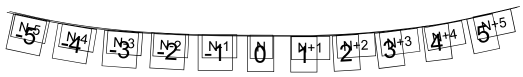
- Förskolebarnen fick räkna ögon och svansar på hundbilder och bl.a. använda uttryck som "jämnt" och "udda". Resultat fördes in i tabeller.

- Representation för 2 hundar som barn från förskoleklassen gjorde det:



Exempel 2: Tidig algebra

- Carraher m.fl. (2006) har visat att amerikanska elever i åldern 9 – 10 år klarar av att använda bokstavssymboler för generaliserade tal och kvantiteter. Eleverna lyckades själva diskutera fram variabelbegreppet och även att överföra sina kunskaper från ett problem till ett annat.



Mary and John each have a piggy bank.
On *Sunday*, they both had the same amount in their piggy banks.
On *Monday*, their grandmother comes to visit them and gives \$3 to each of them.
On *Tuesday*, they go together to the bookstore. Mary spends \$3 on Harry Potter's new book. John spends \$5 on a 2001 calendar with dog pictures on it.
On *Wednesday*, John washes his neighbor's car and makes \$4. Mary also made \$4 babysitting. They run to put their money in their piggy banks.
On *Thursday*, Mary opens her piggy bank and finds that she had \$9.

Exempel 3: Missförstånd av en teckenregel

- Elev B, som klarar det mesta i matematiken väldigt bra, gör trots det konsekvent samma typ av fel, t.ex.
  $2a(5a – 3b) – 3a(3a + b) = 10a^2 – 6ab – 9a^2 – 3ab = a^2 + 3ab$
  $4x^2 – 9 +16x^2 –1 = 20x^2 + 8$
- ”Men B blev mycket frustrerad och rent av arg på mig som lärare då jag försökte diskutera detta med henne. Denna ilska blockerade till en början möjligheterna att rätta till hennes problem, och hon verkade hellre vilja ge upp försöken att klara uppgifter av den typen än att ändra sig.”
- I ett sådant här läge är det viktigt att inte läraren släpper taget, utan lugnt och envist fortsätter diskussionen med eleven.
- Vi redde så småningom ut problemen, och hon var sedan mycket stolt över att klara alla förenklingar med negativa koefficienter.

Exempel 4: Affektiva faktorer, elev F

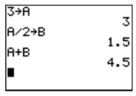
- Han hade mycket svaga förkunskaper i matematik med sig från grundskolan, såväl vad gäller taluppfattning som algebra och andra områden.
  Ex. $4x - x = 4 - x$
  $a - 3a + 2a = a - 5a$
  $10x +3(4 - 3x) + 8 = 11x +11$
- Var heller inte speciellt intresserad av matematik och tyckte det var tråkigt att arbeta med uppgifter.
- Om matematik:
  Ganska svårt och inte speciellt roligt
- Om algebra:
  Jag ser faktiskt ingen som helst nytta av det. Jag har aldrig stött på det ute i vanliga livet och kommer nog aldrig att göra det heller.

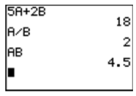
Exempel 4: Affektiva faktorer, elev F

- Motivationen verkade vara dålig. Varför?
- Han hade i stor utsträckning misslyckats med matematik, och intrycket av honom var att han inte mådde särskilt bra när han misslyckades gång på gång.
- Inriktningen var att försöka få honom att lyckas med några uppgifter. Arbetssättet: problemlösning i grupp.
- Viktigt var att stärka hans självförtroende genom att han fick tillfälle att redovisa.
- Han fick delta i våra ”stödtimmar”, där vi fick tid att diskutera matematik och där han också fick arbeta med individuella uppgifter.
- Av stor betydelse var kamratstödet och att både han och jag verkligen trodde på att han kunde lyckas med matematiken.

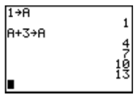
Exempel 5: Grafräknare

- Graham & Thomas (2000) introducerade variabler för 13-14-åringar med hjälp av grafritande räknare.





- De visade att användningen av räknare signifikant förbättrade förståelsen för hur bokstäver används som symboler i elementär algebra.
- Grafräknare kan på ett utmärkt sätt användas för att öka elevernas förståelse på flera sätt.



Exempel 6: Syntes av forskningsresultat kring räknare

Elever som använder räknare

- blir aktivare i sitt sätt att arbeta med matematik
- ser problemlösning på ett nytt sätt när de befrias från rutinberäkningar, både numeriska och algebraiska
- är mer flexibla med problemlösningsstrategier och representationsformer
- får en ökad förmåga att förstå och behärska matematiska begrepp
- förbättrar signifikant såväl problemlösningsförmåga som förmåga att utföra beräkningar och operationer
- försämrar *inte* sin förmåga att räkna med papper och penna, utan visar i de flesta fall förbättring även i sådan färdigheter
- uppvisar en mer positiv attityd gentemot matematik än de som inte använder räknare.

Exempel 6: Syntes av forskningsresultat kring räknare

- *Kännetecken för fall där användningen av räknare inte haft någon påvisbar inverkan på elevernas kunskaper, och rentav varit negativ:*

  Eleverna har inte undervisats explicit i hur räknarna ska användas och har inte förstått deras begränsningar.

  Räknarna har inte använts konsekvent och kontinuerligt i undervisningen, utan har bara tagits in i klassrummet vid enstaka tillfällen.

  Läraren har inte fått någon adekvat utbildning för att hantera räknarna i undervisningen, varken sett ut ett praktiskt eller didaktiskt perspektiv.

  Matematikundervisningen har inte anpassats för att utnyttja räknarna på ett riktigt sätt, utan den har genomförts precis som om eleverna bara hade papper och penna.

Exempel 7: Den röda tråden

- Blomhøj (1997) gjorde en studie kring elevers förståelse av sambandet y = x + 5
- Grevholm (1998) och Hansson (2006) har undersökt samma sak för matematiklärarestuderande.
- Min egen delstudie av hur gymnasieelever resonerar kring samma uttryck tar hänsyn till hur de förstår bokstavssymbolerna, vilka representationformer de kan använda samt hur de kan använda sig av begrepp som variabel, ekvation och funktion.
- Delstudien visar hur förståelse av centrala algebraiska begrepp skapas och utvecklas, men ibland också hindras eller blir felaktig.
- Betydelsen av det långsiktiga lärandet, från förskola till högskola, framträder som en konsekvens. Olika skolformer och –nivåer måste samarbeta vid planeringen av matematikundervisningen.

Några resultat: Den lärande/eleven

- Elevernas förkunskaper och föreställningar om algebra är av väsentlig betydelse.
- Speciellt är tillräckliga kunskaper inom aritmetik och god taluppfattning fundamentala för algebraiskt tänkande.
- Det går dock *inte* att definiera en lägsta nivå på förkunskaperna.
- Elever behöver tillräcklig tid för lärande. Denna visar stor individuell variation, även över en längre period.
- Affektiva faktorer som intresse, motivation, självförtroende och självkänsla kan vara avgörande.

Några resultat: *Läraren/undervisningen*

- Lärarens uppfattningar om vad matematik är och vad matematiska aktiviteter och undervisning handlar om.
- Inom algebra: kunskaper om bokstavssymbolers och andra symbolers olika betydelser och roller.
- Lärarens aktiva och engagerade roll i klassrumsarbetet är av fundamental betydelse.
- Läraren som vidareutbildar sig skaffar sig redskap för att bättre förstå vad som händer i klassrummet, och för att utveckla och förbättra sin egen undervisning.
- Integrering av teknologiska verktyg i undervisningen öppnar möjligheter, men innebär också en utmaning för läraren.

Några resultat: Det lärda/resultatet av undervisningen

- Elevernas begreppsutveckling är mycket heterogen och varierar såväl mellan individer som över tid.
- Många elever har svårt att tillägna sig en strukturell uppfattning av de algebraiska begreppen.
- Resultaten styrker *inte* uppfattningen att elever har en generellt dålig begreppsbildning då de lämnar gymnasiet
- Betydelsen av det långsiktiga lärande framträder på flera ställen i studien.
- Användning av teknologi, som exempelvis räknare, har i de flesta fall visat sig ha positiv inverkan på resultaten av undervisningen.

Vad kan vi lära av studien 1

- Kunskaper och kunskapsutveckling
  - Lärarens kunskaper och uppfattningar om vad som är viktigt i matematiken
  - Synen på hur undervisning och lärande går till
  - Förkunskapernas betydelse
  - Förståelse ↔ färdigheter, abstraktionsprocessen
- Symboler och representationsformer
  - Utveckling och formalisering av symbolsystem
  - Bokstavssymbolernas betydelse, inklusive parametrar
  - Uppövande av strukturkänsla
  - Valet av väg till algebra, speciellt funktionsvägen

Vad kan vi lära av studien 2

- Algebra som en röd tråd i matematikundervisningen
  - Införande av algebra och algebraiskt tänkande i de tidigare skolåren
  - Strategisk utveckling av algebrakunskaperna genom hela skolsystemet
- Teknologi i matematikundervisningen
  - Möjligheter att med hjälp av teknologiska verktyg förbättra matematikundervisningen, speciellt kring algebra
  - Införandet av symbolhanterande verktyg (CAS)
  - Lärarnas utbildning kring teknologiska verktyg, tekniskt och didaktiskt.

Vad kan vi lära av studien 3

- De affektiva faktorernas betydelse
  - Lärares tro på sina elevers förmåga
  - Elevers förståelse av målen med undervisningen och lärandet
  - Användningen av teknologiska verktyg
- Utvecklingsarbeten
  - Betydelsen av att lärare regelbundet får möjlighet att fort- och vidareutbilda sig
  - Utbildning kring teknologiska verktyg i undervisningen
  - Former för utvecklingsarbeten på skolor
  - Vad jag själv lärt mig om algebraundervisning

37 Per-Eskil Persson november 2011

Exempel på former för utvecklingsarbete

- Fortbildningskurser i ämne och didaktik inom olika matematiska områden, användning av räknare och datorprogram i undervisningen, bedömning av elevers matematiska kunskaper och utveckling etc.
- Vidareutbildning, t.ex. magisterexamen.
- ”Lesson studies” och ”learning studies”.
- Forskningscirklar.
- Forskarutbildning, t.ex. till licentiat.
- *Alla matematiklärare måste få möjlighet att delta i utvecklingsarbete och att fort- och vidareutbilda sig regelbundet. Annars avstannar utvecklingen av undervisningen och resultaten riskerar att försämras!*

38 Per-Eskil Persson november 2011

Forskningsprojekt

- *Nspirerande matematik - Ett pilotprojekt med utvärdering och forskning kring undervisning med TI-Nspire-teknologi.*
  Rapport oktober 2010:
  http://dspace.mah.se/handle/2043/10802
- *Att undervisa och lära matematik på gymnasienivå med TI-Nspire-teknologi.*
  Rapport november 2011:
  http://dspace.mah.se/handle/2043/12552
- *Mathematics education for the digital generation: encouraging ICT usage in the mathematics classroom through a school and university partnership.*

  Tillsammans med Per Jönsson, Thomas Lingefjärd, Anders Jönsson, Stefan Njord, Gunilla Svingby samt lärare på skolor i Lund och Malmö.
  Pågår fram till 2013.

Per-Eskil Persson november 2011

En vision om förbättrad algebraundervisning som en nyckel till en teknologisk framtid.

Tack för uppmärksamheten!

40 Per-Eskil Persson november 2011

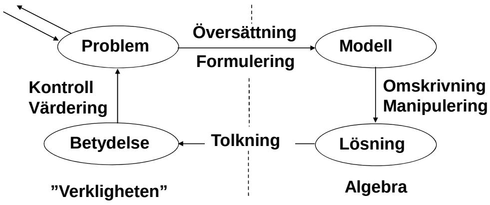
per-eskil.persson@mah.se

Doktorsavhandlingen i fulltext:
http://dspace.mah.se/handle/2043/10665

$$\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$$

41 Per-Eskil Persson november 2011

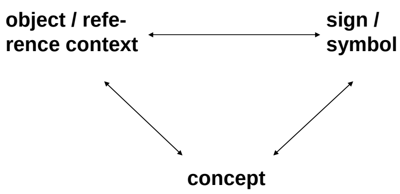
Problemlösningscykeln



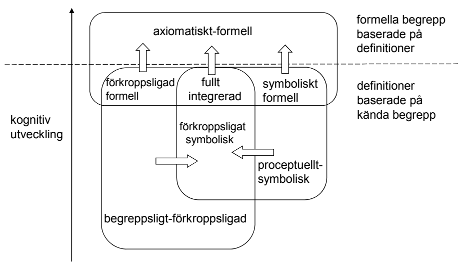
Transformationer mellan representationer (efter Janvier, 1987)

Från / Till	Situationer Text	Tabeller	Grafer	Formler Symboler
Situationer Text	*omformulera*	*tolka tabeller*	*tolka grafer*	*känna igen och tolka*
Tabeller	*samla in data*	*omgruppera*	*avläsa punkter*	*beräkna värden*
Grafer	*skissa grafer*	*plotta grafer*	*omrita*	*plotta funktioner*
Formler Symboler	*modellera situationer*	*anpassa formel till data*	*anpassa funktion till graf*	*omskriva, manipulera*

Den epistemologiska triangeln (Steinbring)



Matematikens tre världar (Tall, 2008)

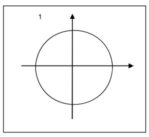


Representationsformer för det matematiska objektet enhetscirkeln (Winsløw, 2004)

$|z| = 1$

$x^2 + y^2 = 1$

$\left\{ \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} : 0 \le t \le 2\pi \right\}$



Enhetscirkeln

S^1

Register (Duval, 2006)

	Diskursiv representation *1. Benämning på objekt* *2. Deklaration av samband eller egenskaper* *3. Inferens: argumentation, beräkningar, slutsatser*	**Icke-diskursiv representation** *Formella och informella bilder och diagram*
Multifunktionella register Processer kan inte göras om till algoritmer	*Naturligt språk:* *Talspråk:* argumentation, förklaringar *Skriftspråk:* teorem, bevis	*Ikoniska*: ritning, skiss, mönster *Icke-ikoniska*: geometriska figurer konstruerade med verktyg
	Övergångs- och hjälprepresentationer: Inga regler för kombinationer	
Monofunktionella register De flesta processer är algoritmiska	*I symboliska system*: Numeriska beräkningar Algebraiska processer Formella språk, logik	Formella diagram Kartesiska grafer Interpolation, extrapolation

Från artefakt till instrument (Trouche, 2005)