

Matematiskt begåvade ungdomars motivation och
erfarenheter av utvecklande verksamheter

Verner Gerholm

Licentiatuppsats

Rapporter i matematikämnet och naturvetenskapsämnenas
didaktik

Nummer 8, 2016

— |

— |



Matematiskt begåvade ungdomars motivation och erfarenheter av utvecklande verksamheter

Verner Gerholm

©Verner Gerholm, Stockholms universitet 2016
ISBN 978-91-7649-503-2

Tryckeri: E-print AB, Stockholm 2016
Distributör: Institutionen för matematikämnet och
naturvetenskapsämnenas didaktik

Till Sofia, Teodor och Joel

— |

— |

Abstract

This licentiate thesis deals with some influencing factors to develop mathematical abilities among mathematical gifted adolescents. Krutetskii's structure of the mathematical abilities and Mönks' triadic model of giftedness is used as a theoretical framework.

The thesis consists of two articles with different aims. The first aim is to investigate to what extent the students had participated in various mathematical activities during their years in school and what impact the students attach to these activities. The second aim was to examine some aspects of the importance of motivation for the mathematically gifted adolescents.

To answer the research questions data was collected with a questionnaire and an interview study of a total of 27 finalists in a national mathematical competition for students in Swedish upper secondary schools.

Generally the students were positive about the activities they had participated in. Specifically acceleration in the subject and mathematical competitions stand out as particularly significant activities according to the students. The study shows the significance of mathematical activities providing a framework to relate to, which will make the progression more visible for the students. Such activities could be mathematical competition problem solving or acceleration in the subject.

The results of the study indicates that intrinsic motivation together with extrinsic motivation with integrated or identified regulation are the most important types of motivation. All students in the study had both intrinsic motivation and some type of extrinsic motivation.

Keywords: gifted education, mathematical activities, mathematics education, mathematically gifted students, motivation, Self Determination Theory

— |

— |

Sammanfattning

Denna licentiatuppsats handlar om påverkansfaktorer som bidrar till att utveckla matematiska förmågor hos matematiskt begåvade ungdomar. Som övergripande teoretiskt ramverk för studien används Krutetskiis struktur av de matematiska förmågorna samt Mönks begåvningsmodell.

Uppsatsen består av två artiklar med olika syften. Den första artikeln syftar till att undersöka i vilken utsträckning studiens ungdomar har deltagit i olika matematiska aktiviteter under sina år i skolan och vilken betydelse de tillmäter dessa aktiviteter. Den andra artikelns syfte är att undersöka några aspekter av motivationens betydelse hos de matematiskt begåvade ungdomarna.

För att besvara frågeställningarna samlades data in med en enkät- och intervjustudie med totalt 27 finalister i Skolornas matematiktävling.

Generellt uttalade sig eleverna positivt om de verksamheter som de hade deltagit i under skoltiden. Speciellt framkom acceleration i ämnet och matematiktävlingar som särskilt betydelsefulla. Studien indikerar betydelsen av att de matematiska verksamheterna ger en ram att relatera till, vilket gör utvecklingen mer synlig för eleverna. Sådana aktiviteter kan vara problemlösning inom tävlingsmatematik eller acceleration i ämnet.

Resultaten av den andra studien visar att inre motivation tillsammans med yttre motivation med integrerad eller identifierad kontroll är de viktigaste formerna av motivation hos studiens deltagare. I studien framkommer också att ingen av deltagarna endast hade inre motivation för ämnet. Tvärtom hade samtliga deltagare både inre motivation och autonom yttre motivation.

— |

— |

Förord

Jag påbörjade mina forskarstudier för över fem år sedan. Det har varit betydelsefulla år i mitt liv där jag lärt känna nya människor, fördjupat tidigare vänskapsband och utvecklats på flera plan. Forskarstudierna har visserligen ofta inneburit mycket ensamarbete, men utan stöd från kollegor, vänner och familj hade denna licentiatuppsats varit omöjlig att skriva. För detta stöd vill jag nu tacka några av dem som betytt extra mycket för arbetet.

Först ett stort tack till Nacka kommun som trodde på mig och genom finansieringen har låtit mig genomföra forskarstudierna som en del av min lärartjänst på Nacka gymnasium.

Mest betydelsefulla för min forskarutbildning är naturligtvis mina handledare och det är dem jag känner störst tacksamhet till. Inger Wistedt som tidigt introducerade och senare inspirerade mig att forska om matematiskt begåvade ungdomar. Gudrun Brattström som under alla år funnits till hands med kloka synpunkter och värdefullt stöd de stunder då det känts motigt. Kerstin Petterson vars stöd under de sista åren varit helt avgörande för att jag skulle kunna fullfölja arbetet med denna uppsats.

Utän de fantastiska ungdomar som deltog i studien hade uppsatsen aldrig blivit till – tack för er tid och samarbetsvillighet. Våra samtal har skänkt mig mycket mer än vad som framkommer i detta verk. Tack också till alla rektorer och lärare som genom att svara på frågor och gett mig tillträde till ungdomarnas skolor underlättat mitt arbete och därmed förbättrat studien.

Ett stort tack till mina rektorer Jarl Axelsson, Krister Bergström och Eva Rejnevall Nord för förståelsen över min arbetssituation och det förtroende ni visat mig. Mina fantastiska kollegor på Nacka gymnasium som dagligen underlättar mitt arbete genom inspirerande och uppmuntrande samtal förtjänar också mitt uppriktiga tack.

Alla härliga kollegor på MND har också till stor del bidragit till att min forskarutbildning varit både rolig och lärorik. Mina läsare på 90 procentseminariet Lovisa Sumpter och Linda Mattsson bidrog i hög utsträckning till att höja kvaliteten på uppsatsen i slutskedet. Licentiandkollegorna Anna-Karin och Cecilia förtjänar ett särskilt tack för alla samtal och all uppmuntran under hela forskarutbildningen.

Jag vill också framföra mitt varmaste tack till alla vid Stockholm Teaching and Learning Studies, STLS, för att ni förgyllt mina fredagseftermiddagar, utvecklat mitt tänkande och stöttat mig under alla dessa år. Ingen nämnd, ingen glömd.

Mina föräldrar, pappa Robin och mamma Eva för korrekturläsning och långa samtal om livet, men främst för att ni gjorde mig nyfiken.

Slutligen. Min älskade familj, Sofia, Teodor och Joel tack för att ni finns vid min sida och för att ni varje dag visar vad som är viktigast i livet.

Duvnäs utskog, september 2016

Verner Gerholm

Förteckning över artiklar

- I. Gerholm, V. (2016). Tävlning och acceleration för utveckling av matematisk förmåga. Publicerad i: *Forskning om undervisning och lärande*. Vol 4:1 sid. 25-49.

- II. Gerholm, V. (2016). Motivationsformer hos matematiskt begåvade ungdomar. Inskickad.

— |

— |

Innehåll

Abstract	vii
Sammanfattning	ix
Förord.....	xi
Förteckning över artiklar	xiii
Innehåll.....	xv
Figurförteckning.....	xvii
Introduktion.....	19
Begåvningsmodeller.....	22
Matematiska förmågor och begåvning	26
En empiriskt grundad modell av den matematiska förmågans struktur	26
Matematisk begåvning	28
Matematiska högpresterare och underpresterare	29
Tävlingsmatematik.....	31
Att utveckla matematisk förmåga	33
Acceleration och berikning.....	33
Verksamheter som utvecklar matematiska förmågor	34
Motivation	38
Självbestämmandeteorin och andra motivationsteorier	38
Motivation och begåvning.....	41
Syfte och frågeställning	43
Metod	44
Identifiering.....	44
Urval	45
Metodval.....	46
Enkät och intervjustudie	46
Deltagarna i studien.....	48
Etiska överväganden	50

Analys	51
Verksamheter	51
Motivationsformer	52
Sammanfattning av artiklarna.....	55
Artikel 1	55
Artikel 2.....	56
Resultat.....	58
Verksamheter.....	58
Motivationsformer	59
Diskussion	62
Resultaten i relation till tidigare forskning.....	62
Metoddiskussion	65
Förslag till framtida forskning	66
Möjliga implikationer för skolan.....	67
Avslutande reflektioner	67
Referenser.....	69
Bilagor.....	76
Bilaga 1 – Intresseanmälan om deltagande i intervjustudie.....	76

Figurförteckning

Figur 1 - Den triadiska interdependensmodellen.....	23
Figur 2 - Taxonomi för inre och yttre motivation	40
Figur 3 - Bakgrundsdata över studiens deltagare	49
Figur 4 - Matematiskt stödjande verksamheter	52
Figur 5 - Analysmall motivationsformer	53
Figur 6 - Respondenternas motivationsformer.....	60
Figur 7 - Respondenternas individuella motivationsprofiler	60



Introduktion

Denna uppsats handlar om matematiskt begåvade ungdomars motivation och deras erfarenheter av matematiskt utvecklande verksamheter. Det är ungdomar snarare än gymnasieelever eftersom utvecklingen ofta skett utanför skolans ram. Uppsatsen grundar sig i en syn på förmågor som i allra högsta grad utvecklingsbara och att vissa ungdomar verkligen är att betrakta som matematiskt begåvade med förmågor som vida överstiger sina jämnåriga kamraters. Ungdomar som ofta förvånar klasskamrater, lärare och föräldrar med sin förmåga att föra logiska resonemang, minnas matematiska strukturer och upptäcka generella samband.

Undervisning av matematiskt begåvade barn och ungdomar har länge varit kontroversiellt i Sverige, men de senaste åren har en ökning av intresset skett i hela samhället, vilket märks på flera sätt (Mattsson & Bengmark, 2011). Införandet av spetsutbildningar på gymnasiet 2009 (Skolverket, 2014) och högstadiet 2012¹ (Skolverket, 2015b) är tydliga tecken på en förändring i samhället där undervisning av begåvade barn och ungdomar inte längre är tabu. I den nu rådande skollagen slås också fast att alla barn och ungdomar har rätt att utvecklas efter sina förmågor:

Elever som lätt når de kunskapskrav som minst ska uppnås ska ges ledning och stimulans för att kunna nå längre i sin kunskapsutveckling. (SFS 2010:800)

Begåvade barn och ungdomar har alltså rätt att möta utmaningar och att utvecklas, vilket både lärare, rektor och huvudmän numera måste ta hänsyn till när de organiserar skolan och planerar undervisningen. För att ytterligare driva på utvecklingen beslutade regeringen 2014 att ge Skolverket i uppdrag att ”stimulera och stödja grund- och gymnasieskolors arbete med särskilt begåvade elever” (Utbildningsdepartementet, 2014). Detta uppdrag resulterade i Skolverkets stödmaterial ”Att arbeta med särskilt begåvade elever” (Skolverket, 2015a) som ska ge inspiration och stöd till undervisande lärare om hur man kan möta de begåvade eleverna. Även Sveriges kommuner och landsting som organiserar de kommunala skolhuvudmännen har aktualiserat frågan genom att 2014 ge ut ett förslag till handlingsplan (Sveriges kommuner

¹ Det finns idag (2016) 20 spetsutbildningar på gymnasiet varav fyra har inriktning matematik och tio högstadieskolor med matematisk spetsutbildning.

och landsting, 2014). För matematikämnet finns nu också ett stödmaterial på Nationellt centrum för matematikutbildning, NCM, som riktar sig till matematiskt begåvade barn och ungdomar och deras lärare (Nationellt centrum för matematikutbildning, 2016).

Inom svensk forskning kan man se samma utveckling som den inom skolans värld. Matematisk begåvning har länge varit ett eftersatt forskningsområde inom matematikdidaktiken, men i och med att Vetenskapsrådet år 2005 beviljade anslag för projektet ”*Pedagogik för elever med intresse och fallenhet för matematik*” vid Växjö Universitet, senare Linnéuniversitetet, började svensk forskning intressera sig för denna elevgrupp (Pettersson, 2011). Visserligen fortfarande i liten skala, men forskningen ökar inom området, vilket märks bland annat genom flera licentiatuppsatser och doktorsavhandlingar (Dahl, 2011; Mattson, 2013; Mellroth, 2014; Pettersson, 2011; Szabo, 2013).

Internationellt har intresset både för begåvningsforskning och matematikdidaktik länge varit betydligt större än i Sverige. Trots detta kan man konstatera att forskning om undervisning av matematiskt begåvade barn och ungdomar fortfarande är ett eftersatt område. Forskning inom matematikdidaktik och begåvningsforskning kunde ha överlappat varandra, men tyvärr hamnade området matematisk begåvning i stället mellan de två forskningsområdena (Leikin, 2009).

Det råder idag stor samstämmighet i uppfattningen att mänskliga förmågor till stor del är påverkansbara. Alla föds visserligen med olika anlag, men många faktorer bidrar till att utveckla individers förmågor, vilket är belagt i flera studier (Bloom & Sosniak, 1985; Mönks & Ypenburg, 2009; Ziegler, 2010). Även matematiska förmågor är i allra högsta grad utvecklingsbara och utvecklingen sker genom deltagande i matematisk aktivitet (Juter & Sriraman, 2011; Krutetskii, 1976). En naturlig följdfråga till detta är under vilka omständigheter denna aktivitet ska äga rum.

Att skola och undervisning är en av de starkaste påverkansfaktorerna för utveckling är uppenbart, men för de elever som med lätthet når skolans mål måste undervisningen kompletteras för att kunna erbjuda även dessa elever en chans att möta utmaningar. Det förekommer idag en mängd olika program, kurser och verksamheter som syftar till att utveckla matematiskt begåvade elevers kunskaper i ämnet, men systematisk kunskap om dessa insatser saknas ofta (Leikin, 2009). Med utgångspunkt i denna brist på kunskap syftar den första artikeln i uppsatsen till att undersöka matematiskt begåvade ungdomars erfarenheter av utvecklande verksamheter inom eller utanför skolans ram.

En lika uppenbar påverkansfaktor som skola och undervisning är individens motivation till att lära. Alla som någon gång har erfarit skillnaden mellan omotiverade och motiverade elever kan vittna därom. Det råder idag också i stort sett total enighet om att motivation är en av de grundläggande faktorerna vid all form av lärande (Bandura & Shunk, 1981; Deci & Ryan, 2000 a; Dweck, 2012; Eccles & Wigfield, 2000; Skaalvik & Skaalvik, 2015). Motivationens roll är också tydlig inom begåvningsforskning, vilket märks på de

modeller som försöker förklara begåvningens natur (Mönks & van Boxtel, 1985; Renzulli, 1978; Ziegler, 2010). Trots motivationens starka roll som påverkansfaktor finns det få studier på området inom det matematikdidaktiska forskningsfältet och den forskning som genomförts har inte tagit tillräcklig hänsyn till detaljrikedomen hos motivationens kvalitativa aspekter (Hannula, 2006). I uppsatsens andra artikel undersöks olika former av motivation hos matematiskt begåvade ungdomar.

De två artiklar som ingår i uppsatsen fokuserar alltså två av de viktigaste faktorerna för utvecklingen av matematiska förmågor, nämligen motivation och undervisning. Dessa faktorer är i sig själva inte statiska och förutsätter också att bättre motivation och undervisning har direkt påverkan på utvecklingen av matematiska förmågor. Faktorerna separeras i artiklarna men är i själva verket ömsesidigt beroende av varandra. God undervisning föder motivation och motiverade elever lyfter undervisningen.

Uppsatsens disposition har följande upplägg. Inledningsvis presenteras några generella begåvningsmodeller och hur dessa förhåller sig till utvecklandet av förmågor. Därefter presenteras Krutetskiis (1976) modell av den matematiska förmågans struktur. Modellen ligger till grund för studiens definition av matematisk begåvning. I detta avsnitt tydliggörs också distinktionen mellan höga prestationer och matematisk begåvning. För att bättre förstå urvalsprocessen beskrivs därefter tävlingsmatematikens koppling till problemlösning och matematisk förmåga. I studien undersöks deltagande i olika verksamheter samt motivation och om detta handlar de två nästföljande kapitlen om. Innan beskrivningen av metod och analys preciseras syfte och frågeställningar. Därefter ges en sammanfattning av de båda artiklarna följt av en presentation av studiens resultat med avsikt på verksamheter och motivation. Avslutningsvis diskuteras resultaten i relation till tidigare forskning, metodiska övervägande, vidare forskning och resultatens användbarhet för verksamma i skolan.

Begåvningsmodeller

I detta kapitel ges en överblick av olika modeller som historiskt har använts för att förklara begåvning. I kapitlet behandlas begåvning i generell bemärkelse och kan alltså syfta på begåvning inom olika domäner som musik, idrott eller akademiska ämnen. I de flesta fall är det dock domäner med en stark koppling till kognitiva förmågor som avses.

Synen på begåvning har förändrats radikalt under de senaste 100 åren. De tidigaste begåvningsforskarna trodde att intelligens var den förklaringsmodell som bäst förklarade begåvning och framgång. De tankar som var rådande antog att intelligens var samma sak som begåvning, att begåvningen är normalfördelad, att befolkningen kunde rangordnas efter begåvning och att intelligens kunde mätas med hjälp av intelligenstest (Ziegler, 2010). Vidare ansåg man att intelligensen var statisk och inte förändrades över tid.

En av de tidiga, mest kända, företrädarna för den ovan beskrivna intelligensteorin var Lewis H. Terman som i början av 1920-talet påbörjade en longitudinell studie med cirka 1500 högt begåvade barn (mätt med IQ-test). Studien pågick fortfarande 2009 (Mönks & Ypenburg, 2009). Efter att ha följt individerna i över 30 år reviderade Terman 1954, två år före sin död, sin starka tro på intelligensen som förklaringsmodell för exceptionella framgångar (Mönks & Ypenburg, 2009). Terman förklarar (1954) att hans resultat tydligt pekar mot att andra faktorer än intelligens såsom motivation, uthållighet och familjesituation i högsta grad är avgörande för framtida framgång oavsett område.

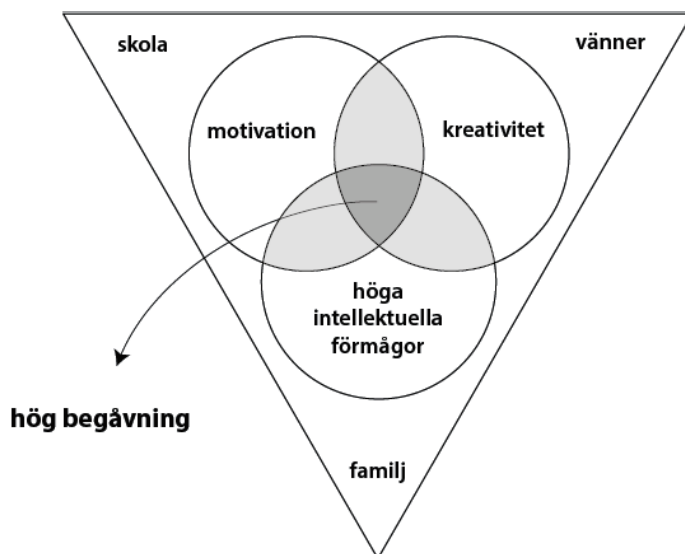
Även andra begåvningsforskare upptäckte att fler faktorer än intelligens hade betydelse för utvecklandet av exceptionella förmågor. Detta ledde till att modellerna anpassades och flera faktorer lades till i förklaringsmodellerna. Idag är forskarna också ense om att inte bara begåvning, utan också resultat på intelligenstest, förändras över tid (Ziegler, 2010).

Modeller som tar hänsyn till flera faktorer kallas vanligen flerfaktormodeller eller multikausala modeller. En av de mest kända är Renzullis (1978) empiriskt grundade triadiska begåvningsmodell, eller ”*The three ring theory*”. De faktorer, eller personlighetsegenskaper, som ingår i Renzullis modell är intellektuella förmågor över medelnivå samt höga nivåer av ”*task commitment*” och kreativitet. Med ”*task commitment*” avses en förfinad form av motivation där individen helt och hållet kan fokusera och ägna sig åt en uppgift under en längre tid (Renzulli, 1978). Renzulli betonar också att de intellektuella förmågorna visserligen ska vara över medelnivå, men att det alls inte är

nödvändigt med exceptionella intellektuella förmågor. Vidare avser Renzulli med kreativitet bland annat originalitet i tänkandet, uppfinningsrikedom och förmåga att bortse från konventioner och standardprocedurer när så behövs, men betonar också svårigheten för forskare att verkligen mäta dessa kreativitetsaspekter hos individen (Renzulli, 1978).

En individ med höga intellektuella förmågor må vara hur motiverad och kreativ som helst, i fel miljö kommer hen ändå inte utveckla sin potential. Denna uppenbara kritik mot Renzullis modell krävde att modellen kompletterades, även om den fortfarande ofta refereras till. Med Renzullis modell som grund, vetenskapen om den sociala miljöns betydelse och med beaktande av psykologiska utvecklingsteorier skapade Mönks och hans kollegor den triadiska interdependensmodellen (Mönks & van Boxtel, 1985). Modellen är multi-kausalt och tar hänsyn till både kognitiva faktorer och sociala betingelser.

Modellen (Figur 1) visar två triader som är ömsesidigt beroende av varandra (interdependenta). Den första triaden utgörs av de kognitiva faktorer som Renzullis byggde sin modell av, men har i viss mån modifierats under årens gång. Renzullis ”intellektuella förmågor över medel” har skärpts till ”höga intellektuella förmågor”, vilket ungefär avser de 5 – 10 översta procenten av populationen. Den intellektuella förmågan mäts ofta med ett intelligensstest och i det praktiska arbetet med att diagnostisera begåvade barn har Mönks använt gränsen 130 på ett IQ-test, men gränsen är inte exakt, varför den mer vaga definitionen de 5 – 10 översta procenten är att föredra (Mönks & Ypenburg, 2009).



Figur 1 - Den triadiska interdependensmodellen. (Mönks & Ypenburg, 2009)

Renzullis "task commitment" innebar en förädlad form av motivation som tydligt kopplades till lösandet av specifika uppgifter. I Mönks modell utvidgas detta till det bredare "motivation", vilket utöver "task commitment" bland annat också omfattar förmågan att sätta upp långsiktiga mål, förutse risker och bedöma osäkerhetsfaktorer (Mönks & Ypenburg, 2009). Även de känslomässiga aspekterna av motivation ingår i Mönks formulering. Det vill säga att individen tycker att något är roligt och att man vill utföra en uppgift för dess egen skull.

Kreativitet kan till exempel innebära originella lösningsmetoder, självständigt tänkande och förmågan att finna spännande problem i omgivningen. Som kontrast till det kreativa tänkandet nämner Mönks (2009) det repetitiva tänkande som han anser ofta är det som förväntas i skolan.

Som framgår av modellen har de sociala faktorerna en minst lika viktig funktion att fylla. Mönks betonar särskilt vikten av de närmaste sociala relationerna för att en utveckling ska komma till stånd:

... ett gott socialt utbyte med framför allt familj, skola och vänner [...] är oundgängligt för en sund utveckling. (Mönks & Ypenburg, 2009, s. 27)

Betydelsen av vänskapsrelationer ökar drastiskt under ungdomsåren och detta är av särskild betydelse när man talar om begåvade ungdomar eftersom klasskamraterna ofta inte är på samma utvecklingsnivå. I modellen bör man alltså hellre tala om "peers" än vänner eftersom en "peer" är på samma utvecklingsnivå. Värt att nämna är dock att vikten av "peers" inte minskar betydelsen av vanliga vänskapsband mellan jämnåriga elever (Mönks & van Boxtel, 1985). Även under ungdomsåren är familjens roll fortfarande viktig för individens utveckling. Varma och starka band mellan familjemedlemmarna, involverade och intresserade föräldrar samt en hög grad av frihet och förtroende nämns som positiva för barnets utveckling (Mönks & van Boxtel, 1985). De sociala aspekterna av skolan och undervisning har också en enorm betydelse för utvecklingen av individens förmågor. Inte minst viktigt är naturligtvis att eleverna möter välutbildade och kunniga lärare. Den sociala kompetensen hos ungdomen blir i mötet med den pedagogiska miljön en viktig länk för att goda relationer och ett effektivt utbyte skall kunna ske (Mönks & Ypenburg, 2009).

Inte heller Mönks modell har klarat sig undan kritik. Enkelheten i modellen är uppenbart tilltalande, men det är en teoretisk produkt som saknar empirisk giltighetsprövning och den har aldrig utsatts för några utvärderingsstudier. De ingående faktorerna är också ifrågasatta. Kreativitet är till exempel ett psykologiskt begrepp som idag saknar tydliga metoder för mätning, vilket gör det svårt att förhålla sig till (Ziegler, 2010). Dessutom är modellen så generell att den är svår att motbevisa. Med facit i hand går det alltid att peka på någon av faktorerna som avgörande för ett lyckande eller ett misslyckande.

Begåvningsmodellerna som kommit efter Mönks modell tar hänsyn till fler faktorer och blir på så sätt mer komplexa och förfinade. Egenskaper som social kompetens och stresstålighet analyseras till exempel inom den så kallade Münchenmodellen (Ziegler, 2010). Modellen särskiljer också flera begåvningsområden och berör i och med detta Howard Gardners teori om multipla intelligenser (Gardner, 1983).

Aktiotop-modellen (Ziegler, 2010) som anknyter till systemteorierna tar fasta på hela systemet som individen befinner sig inom. Modellen fokuserar individens handlingar och grundläggande är ”*föregående stegets princip*” som bygger på det faktum att vi hittills inte funnit någonting som endast en människa kan klara av. Även de största genierna blir ganska snabbt upphunna inom sin domän. Alla individer har så att säga tillgång till nästa steg i utvecklingen. En förbättrad förmåga att prestera inom en domän ses som utvidgning av individens handlingspotential (Ziegler, 2010). Modellen pekar tydligt ut pedagogens roll som utpekare av nästa steg för individuell utveckling.

Det finns alltså flera olika modeller som kan förklara exceptionella prestationer, men i denna studie har Mönks flerfaktormodell använts som grund för hur begåvning utvecklas. I studien används modellen för att peka ut undervisning (skola) och motivation som viktiga faktorer för utveckling av matematiska förmågor. Värt att notera är dock att de flesta moderna begåvningsmodeller inkluderar dessa faktorer. I det avseendet skulle alltså både Münchenmodellen och Aktiotop-modellen också fungera som grund för studien.

Matematiska förmågor och begåvning

De begåvningsmodeller som presenterats i föregående kapitel är generella modeller över begåvning inom olika domäner och pekar inte särskilt ut matematisk begåvning. I detta kapitel presenteras en modell över den matematiska förmågans struktur och vilka utmärkande drag som matematiskt begåvade barn och ungdomar besitter.

En empiriskt grundad modell av den matematiska förmågans struktur

I detta arbete används det ramverk över den matematiska förmågans struktur som den ryske psykologen och forskaren V. A. Krutetskii (1976) utvecklade. Modellen är resultatet av en longitudinell studie som pågick mellan åren 1955 och 1966. Sammanlagt deltog nära 200 barn och ungdomar mellan sex och 17 år i studien. Eleverna som deltog var utvalda av sina lärare utifrån deras bedömda förmåga i matematik. Totalt indelades eleverna i grupperna ”mycket duktiga”, ”duktiga”, ”genomsnittliga” och ”svaga elever”. Värt att nämna är att de bästa eleverna inte nödvändigtvis var generellt begåvade utan enbart duktiga inom matematik. Datainsamlingen genomfördes främst med enskilda intervjuer och iakttagelser/samtal där deltagarna arbetade med olika serier av matematiska problem. Främst gjordes jämförelser i åldersgrupper, men några elever följdes under längre tid och då ingick även speciallektioner, klassrumsobservationer och hembesök. Utöver den empiriska undersökningen av barnen och ungdomarna genomfördes litteraturstudier, kursplanestudier, intervjuer med matematiker och matematiklärare samt en sammanställning av provresultat av över 1 000 gymnasieelever i syfte att kartlägga den matematiska förmågans struktur. Dessutom genomfördes nio fallstudier på exceptionellt duktiga elever som inte var med i den ordinarie studien och noggrann inläsning på tidigare fallstudier av matematiskt begåvade barn och ungdomar (Krutetskii, 1976).

Krutetskii delade upp den matematiska förmågan i flera underförmågor som sinsemellan antogs samverka med varandra på ett intrikat sätt. Förmågorna som Krutetskii fann var:

A. Förmågan att *insamla* och *formalisera matematisk information*

- t.ex. förmågan att upptäcka den formella strukturen i ett matematiskt problem.

B. Förmågan att *bearbeta matematisk information*

- t.ex. förmågan att tänka logiskt inom områden som representeras av kvantitativa och spatiala samband samt numeriska och algebraiska symboler,
- förmågan att tänka och uttrycka sig med hjälp av matematiska symboler,
- förmågan att effektivt kunna generalisera samband, räknetoder och egenskaper hos matematiska objekt,
- förmågan att förkorta matematiska resonemang och tillhörande beräkningar,
- flexibilitet i tänkandet samt en strävan efter klarhet, enkelhet, elegans och rationalitet i lösningar.

C. Förmågan att *minnas matematisk information*

- s.k. matematiskt minne, dvs. ett generaliserat minne för matematiska samband, typiska egenskaper, problemlösningsmetoder samt mentala strukturer för argumentation och bevisföring.

D. Ovanstående förmågor resulterar i en *allmän* och *sammansatt förmåga*, som manifesteras i ett matematiskt sinnelag.

(Krutetskii, 1976, ss. 350-351) i översättning av (Szabo, 2013, ss. 27-28)

Krutetskii fann att de begåvade eleverna skilde sig åt gällande hur de angrep de matematiska problem som de ställdes inför. Han delade därför in de begåvade eleverna i tre grupper. En analytisk, en geometrisk och en harmonisk grupp. Elever som tillhörde den analytiska gruppen tenderar att tänka verbalt-logiskt, medan de som tillhörde den geometriska gruppen snarare tänker visuellt i bilder. Den harmoniska gruppen utgör en kombination av de två övriga

och växlar mellan de olika tankesätten. Gällande personlighetsdrag, fysisk utveckling och förmåga inom andra områden fanns det stora skillnader mellan de matematiskt begåvade eleverna (Krutetskii, 1976).

Krutetskii var noggrann med att poängtera att den matematiska förmågan ingalunda är av statisk natur. Tvärt om är den högst utvecklingsbar och den utvecklas genom matematisk aktivitet (Krutetskii, 1976). Möjligheten att utveckla förmågor överensstämmer, som tidigare nämnts, med rådande begåvningsforskning (Ziegler, 2010).

Matematisk begåvning

I detta arbete används Krutetskii's modell av den matematiska förmåganstruktur för att definiera och identifiera matematiskt begåvade elever. Barn och ungdomar som i hög grad använder de matematiska förmågor som Krutetskii beskriver definieras alltså i denna studie som matematiskt begåvade. Värt att poängtera är att en individ inte behöver använda samtliga förmågor vid problemlösning. Det ska också påpekas att matematisk förmåga i detta avseende är relativ och alltså alltid måste ställas i relation till jämnåriga kamraters förmågor i matematik.

Till ovanstående definition ska tilläggas att matematiskt begåvade elever *inte* är en annan benämning på matematiskt högpresterande elever. Matematiskt begåvade elever uppskattar inte heller alltid den undervisning som förekommer i skolan och presterar därför inte alltid på topp (Campbell, 1996; Pettersson & Wistedt, 2013). Eleverna klarar sig ofta inte heller själva utan behöver duktiga lärare som förmår att se och möta dem på rätt nivå för att de ska kunna ta till vara sin potential (Campbell, 1996). Det förekommer också att matematiskt begåvade barn döljer sina förmågor för att bättre passa in i den rådande klassrumsnormen (Pettersson & Wistedt, 2013; Wallström, 2010). Omvänt visar Juter och Sriraman (2011) att höga prestationer inom skolmatematiken inte nödvändigtvis innebär att eleven är matematiskt begåvad i betydelsen duktig problemlösare, vilket också bekräftas i Mellroths studie (2014). Ovanstående innebär dock inte att det råder något motsatsförhållande mellan kategoriseringarna. Matematiskt begåvade elever kan mycket väl vara högpresterande och vice versa.

Att vara matematiskt begåvad är inte heller samma sak som att vara särbegåvad (men vissa särbegåvade barn *kan* vara matematiskt begåvade). Med särbegåvning avses vanligen individer som presterar bland de högsta två, tre procenten på ett intelligenstest, men gränserna kan variera (Ziegler, 2010).

Sedan våren 2015 finns i Sverige ett stödmaterial som getts ut av Skolverket för att stödja undervisningen av särskilt begåvade elever i skolan. I materialet poängteras att det inte finns en allmän accepterad definition för vilka elever som ska räknas som särskilt begåvade (Mattsson & Pettersson, 2015;

Stålnacke, 2015). Vissa modeller talar om de 2-5 procent bästa eleverna medan andra talar om uppåt 20 procent. Skolverket har valt benämningen *särskilt begåvad* och avser då cirka fem procent av eleverna inom respektive ämne, men poängterar också att gränsen inte är absolut utan till för att ge ett riktvärde på ungefär hur många elever det är som berörs av materialet. För den mest begåvade elevgruppen används då det behövs termen *extremt begåvad* varmed avses den mest begåvade procenten av populationen inom en domän (Mattsson & Pettersson, 2015).

I denna uppsats används genomgående termen ”matematiskt begåvade” för de deltagande ungdomarna. Det är min uppfattning att studiens deltagare inkluderas i Skolverkets definition av ”särskilt begåvad i matematik”, flera av dem är sannolikt också att betrakta som ”extremt begåvade”, men där blir bedömningen inte lika säker.

Matematiska högpresterare och underpresterare

För att beteckna matematiskt högpresterande elever används ett fastställt prestationskriterium. Kriteriet kan visserligen vara godtyckligt fastställt av forskaren, men vanligtvis används betyg i skolans kurser alternativt poäng/percentiler på vedertagna tester. Som exempel använder Szabo (2013) betyg för att välja ut deltagare till sin studie medan Skolverket, utöver det stödmaterial som beskrevs ovan, nyttjar två andra definitioner på högpresterande elever,² dels de 5 procent bästa eleverna i de internationella undersökningarna PISA, TIMSS och PIRLS och dels de som når de två högsta nivåerna av sex i de nämnda undersökningarna (Skolverket, 2012). Att det rör sig om olika grupper av elever blir uppenbart när man granskar statistiken. 2009 fick 17,2 procent av eleverna betyget MVG i kursen Matematik A (Skolverket, 2010), medan endast 7 procent nådde de högsta kunskapsnivåerna i PISA (Skolverket, 2012), än mindre var, naturligtvis, gruppen som utgjorde de fem procent med högst resultat i mätningarna. Av ovanstående förstår vi vikten av att veta vilka kriterier som används för att avgöra huruvida elever är att betrakta som högpresterande eller ej.

Om högpresterande elever (enligt Skolverkets definitioner) vet vi att deras resultat inte alltid följer övriga elevers utveckling. Till exempel har högpresterande elevers resultat i PISA och TIMSS försämrats i högre utsträckning än hos svagpresterande under åren 1995-2007 (Skolverket, 2012). Norska studier visar också att trots en generell ökning av de norska resultaten i internationella mätningar har inte andelen som når de två högsta nivåerna ökat (Grønmo, 2014).

² Litteraturen som avses är rapporter från de stora internationella undersökningarna PISA, TIMSS och PIRLS och kan alltså avse högpresterare inom olika ämnen.

Vi vet också att högpresterande elever oavsett ämne i större utsträckning än medelpresterare kommer från hem med hög socioekonomisk bakgrund, hög utbildningsnivå och stort socialt kapital (Skolverket, 2012). Vidare vet vi att det är ovanligt att elever presterar högt inom flera ämnen och att lärare till högpresterare elever uppfattar ett större engagemang från de högpresterande barnens föräldrar än från andra föräldrar.

Med *underpresterare* avses en individ som antas prestera under sin förmåga i ett eller flera ämnen. Det föreligger alltså en skillnad mellan elevernas förmåga och vad de presterar. Vanligt förekommande hos denna elevgrupp är till exempel låg skolmotivation, negativ självbild gällande skolan och missnöje med studievanor och uppnådda resultat (Mönks & Ypenburg, 2009). Begåvade underpresterare anser i högre utsträckning än högpresterare att deras beteende styrs av yttre betingelser (Mönks & Ypenburg, 2009). Med ovanstående beskrivning bör man komma ihåg att trots likheten mellan orden högpresterare och underpresterare är de inte varandras motsatser. Det går mycket väl att vara både högpresterare och underpresterare samtidigt. En elev som lätt når högsta betyg i skolan, presterar kanske fortfarande under sin förmåga. Vanligtvis avses dock med underpresterare elever som inte lyckas bra i skolan.

Tävlingsmatematik

I kapitlet redogörs för tävlingsmatematik, kopplingen mellan tävlingsproblem och matematisk förmåga. I kapitlet presenteras också Skolornas matematiktävling och de tävlingar som leder fram till den Internationella matematikolympiaden.

För att upptäcka och beskriva matematiska förmågor krävs aktiviteter där förmågor kommer till användning (Krutetskii, 1976). Både Krutetskii och senare forskare (Pettersson, 2011; Szabo, 2013) har använt sig av problemlösning som aktivitet för att studera hur förmågorna kommer till uttryck. Verksamheter som bygger på problemlösning kommer alltså att erbjuda en bra utgångspunkt för att undersöka ungdomar som i hög grad besitter matematiska förmågor och ett exempel på en sådan verksamhet är tävlingsmatematik. Problemlösning är nämligen helt centralt inom tävlingsmatematik och problemen som förekommer i tävlingarna har det gemensamt att de erbjuder eleverna uppgifter som inte är av standardkaraktär (Andžāns & Koichu, 2009). I det avseendet har tävlingsproblemen alltså mycket gemensamt med de problem som Krutetskii (1976) använde i sin studie.

Eftersom tävlingsmatematik har använts som urvalsinstrument har samtliga av studiens deltagare ägnat sig åt tävlingsmatematik i någon form. Tävlingsmatematik används här som enhetligt begrepp, men det existerar naturligtvis skillnader mellan olika tävlingar. Vissa genomförs individuellt, andra som lagtävlingar, några tävlingar har flervalsoalternativ, medan andra kräver redovisningar. Ibland bedöms tävlingsbidragen av elevens lärare, ibland av en extern bedömningskommitté. Tävlingarna kan också rikta sig till några få skolor eller till miljoner ungdomar världen över. Variationen är således stor, men det finns vissa fundamentala likheter. Syftet med tävlingarna är för det mesta (alltid?) att stimulera intresset för och öka deltagarnas kunskaper i matematik. Detta gäller till exempel för Kängurutävlingen vars syfte är ”att stimulera intresset för matematik genom bra problem som är tänkta att väcka nyfikenhet och lust att lära matematik” (Nationellt centrum för matematikutbildning, 2015) och för den internationella matematikolympiaden som syftar till att förena matematikintresserade ungdomar världen över och låta dem uppleva utmanande matematik i en anda av vänskaplig konkurrens (International Mathematical Olympiad Foundation, 2015).

Den för studien mest viktiga tävlingen är Skolornas matematiktävling (SMT) som riktar sig till elever i den svenska gymnasieskolan³. Tävlingen arrangeras årligen sedan 1961 av Svenska matematikersamfundet och samlar idag cirka 1000 deltagande elever per år. Skolornas matematiktävling genomförs i två omgångar med en kvalificeringsskrivning på respektive elevs skola och en finalomgång på någon av landets högskolor eller universitet. I kvalomgången utses utöver finalisterna de bästa skollagen som består av deltagande skolors tre bästa individuella resultat. Samtliga finalister erbjuds efter finalen att delta i en korrespondenskurs som ges av Svenska matematikersamfundet (Svenska matematikersamfundet, 2014).

Av finalisterna från Skolornas matematiktävling väljer tävlingskommittén ut maximalt 20 tävlande till den nordiska matematiktävlingen (Nordic Mathematical Contest, NMC). Tävlingen som skapades 1986 syftar till att ge nordiska elever erfarenheten av tävlingsproblem som i svårighetsgrad ligger mellan de nationella tävlingarna och den Internationella matematikolympiaden (Samuelsson, 1988). I tävlingen som genomförs årligen deltar elever från Island, Norge, Danmark, Finland och Sverige. Tävlingsresultatet i NMC och prestationer i korrespondenskursen används i urvalsprocessen då sex ungdomar ska tas ut till den Internationella matematikolympiaden.

Den Internationella matematikolympiaden, IMO, är den mest prestigefyllda matematiktävlingen som studiens ungdomar deltagit i. Tävlingen har från starten 1959 växt till att omfatta tävlande från över 100 länder. Alla tävlingsproblem kommer från något av områdena algebra, kombinatorik, geometri och talteori. Efter bedömning av deltagarnas lösningar delas guld-, silver- och bronsmedaljer ut efter fastställda poänggränser. Antalet medaljer varierar, men ska inte överstiga hälften av deltagarna och förhållandet mellan guld, silver och brons ska ungefär vara 1:2:3 (IMO Advisory board, 2016). Flera av de tidigare medaljörerna i olympiaden har senare erhållit Fieldsmedaljen, vilken ibland omnämns som matematikens Nobelpris.

Om Internationella matematikolympiaden är den mest prestigefyllda tävlingen så är den Internationella Kängurutävlingen den tävling som samlar i särklass flest deltagare. 2015 deltog nära sju miljoner elever mellan sex och 18 år i 65 länder. Tävlingen riktar sig till alla elever i grundskolan och gymnasiet. Totalt består tävlingen av 24 problem fördelade i tre svårighetsgrader. Alla problem presenteras med fem svarsalternativ varav endast ett är korrekt. Tävlingen som är världsomspännande arrangeras i Sverige av Nationellt centrum för matematikutbildning, NCM och Kungliga Vetenskapsakademien (Nationellt centrum för matematikutbildning, 2015).

³ Högstadiel elever kan beviljas dispens.

Att utveckla matematisk förmåga

I följande kapitel presenteras först en allmän kategorisering av insatser som används för att utveckla förmågor hos begåvade barn och därefter en mer detaljerad indelning av verksamheter som syftar till att utveckla matematiskt begåvade elevers förmågor. Den senare indelningen ligger till grund för analysarbetet i den första artikeln.

Acceleration och berikning

Helt grundläggande för de modeller och teorier som används i detta arbete är att förmågor inte är statiska utan i hög grad utvecklingsbara. Detta gäller för såväl Mönks (2009) teoretiska modell som för Krutetskiis (1976) empiriskt grundade beskrivning av den matematiska förmågans struktur. All utveckling kräver systematisk träning eller deltagande i matematisk aktivitet som Krutetskii uttryckte det, men helt uppenbart tar det olika lång tid för individer att lära sig. Redan efter några år i skolan är skillnaden mellan de snabbaste och de långsammaste eleverna så stora att de motsvarar flera års lärande och skillnaderna ökar i takt med att eleverna går vidare i årskurserna (Gagné, 2005).

Skolan har av tradition anpassat undervisningen efter normen och de elever som inte har hängt med har fått tillgång till extra stöd eller specialundervisning i någon form, men för att även de elever som har lätt för sig ska ha möjlighet att möta utmaningar i skolan kan det också krävas anpassad undervisning eller stödinsatser för dessa elever. Vanligen delas dessa insatser in i acceleration och berikning (Mönks & Ypenburg, 2009).

Acceleration innebär som ordet antyder att eleven får bearbeta det som förväntas läras in i snabbare takt än övriga klasskamrater och/eller flytta fram till den årskurs som bättre svarar mot elevens kunskapsnivå. En tioåring skulle alltså kunna läsa matematik med 13-åringarna eller tyska med 15-åringar.

Inom den andra formen av stödåtgärd, berikning, låter man inte elever arbeta snabbare eller flytta fram årskurser. Däremot anpassas undervisningen så att eleverna får möta ett fördjupat ämnesinnehåll eller stoff som ligger utanför kursplanen (Mönks & Ypenburg, 2009). Både accelerationen och berikningen kan i praktiken organiseras på en mängd olika sätt.

Forskning om effekterna av de två stödinsatserna är inte helt samstämmiga. Ziegler (2010) skriver att det finns positiva effekter av acceleration och prestationsgruppering för de begåvade barnen och skriver också att det generellt

finns positiva effekter av berikning för denna elevgrupp. Subotnik och hennes kollegor skriver att det finns få utvärdering av berikande program som sommarkurser, men att det råder samstämmighet i att acceleration har en positiv effekt på begåvade ungdomar (Subotnik, Olszewski-Kubilius, & Worrel, 2011).

I Sowell (1993) sammanställning av stödåtgärder för matematiskt begåvade ungdomar finns det visst stöd för att acceleration i olika former har en positiv effekt, men dessa effekter syns inte när det gäller berikande stödåtgärder (Sowell, 1993). Matematiskt begåvade ungdomar gynnas av homogena grupper, men denna effekt av nivågruppering syns inte hos andra elevgrupper (Hunt, 1996), varför metoden kan ifrågasättas av etiska skäl.

I antologin ”*Creativity in Mathematics and the Education of Gifted Student*” (Leikin, Berman, & Koichu, 2009) presenteras flera olika verksamheter till stöd för matematiskt begåvade elever. I Leikins (2009) sammanfattande kapitel propagerar hon för att dessa verksamheter bör erbjudas matematiskt begåvade elever, men konstaterar samtidigt att det saknas forskning och sammanställd kunskap om vilka effekter dessa verksamheter egentligen har på eleverna.

Verksamheter som utvecklar matematiska förmågor

De verksamheter som Leikin (2009) anser att matematiskt begåvade elever ska komma i kontakt med under sina skolår innehåller både accelererande och berikande aktiviteter. Med verksamhet menas i detta avseende ett sammanhang där man ägnar sig åt olika matematiska aktiviteter, vilka till exempel kan bestå av problemlösning eller bevisföring. Värt att notera är att samtliga verksamheter är organiserade i någon form och utöver *normal* undervisning.

Till stora delar har Leikins verksamheter använts som analysredskap för att besvara de frågeställningar som presenteras längre fram i artikel 1 (Gerholm, 2016). Då inte samtliga av verksamheterna kunde relateras till det svenska skolsystemet har vissa av dem modifierats för att bättre svara mot de erfarenheter som svenska elever har av sin skolgång. Verksamheterna ordnas, precis som hos Leikin, efter om det förekommer inom eller utanför skolan eller kan förekomma både inom och utanför skolan.

Skolan är på många sätt den naturliga platsen att organisera olika former av verksamheter som ska stödja elevernas utveckling. Här indelas verksamheterna de i tre olika kategorier.

Verksamheter inom skolan	
Specialskolor och klasser med tydlig matematisk profil	Verksamheter innefattande alla former av skolundervisning där en klass eller skola har en tydlig inriktning mot matematik. De tydligaste exemplen är de riksrekryterande spetsklasserna på högstadiet och gymnasiet som har inriktning matematik, men även mer lokalt anpassade skolor och profilklasser faller inom ramen för denna verksamhet. Naturvetenskapsprogrammet på gymnasiet är det program som innehåller flest obligatoriska matematikkurser och kan därför också ses som en profilering mot matematik, om än inte lika tydlig som spetsgymnasierna.
Anpassade grupper och särskild undervisning	Verksamheter som rymmer olika typer av undervisningsformer. Gemensamt för dem är att elever lyfts från ordinarie matematikundervisning för att få extra träning tillsammans med andra elever. All undervisning sker under överinseende av en matematiklärare eller matematiker. Innehållet fokuserar skolkurser, men kan vara både accelererande (grundskoleelever som läser in gymnasiekurser) eller i form av nivågruppering (de bästa på en skola får läsa kursen tillsammans).
Individanpassad undervisning i ordinarie klass	Verksamhet där den matematiskt begåvade eleven deltar i ordinarie undervisning, men arbetar i egen (snabbare) takt eller med andra uppgifter än övriga i klassen (t.ex. problem från tävlingsmatematik). Här återfinns alltså hela spännvidden från elever som tillsammans med sin lärare tagit fram en tydligt utpekad plan till elever vars lärare låter dem göra vad de vill, eftersom de redan kan kursinnehållet.

Av praktiska skäl organiseras vissa verksamheter ibland i skolan och ibland utanför skolan. Det kan bero på om verksamheten riktar sig till flera olika skolor, vem som står som ansvarig eller vem som tagit initiativ till verksamheten.

Verksamheter inom eller utanför skolan	
Matematik-klubbar och studiecirklar	Matematiska verksamheter som riktar sig till matematiskt intresserade individer. Klubbarna kan existera och organiseras på eller utanför skolan dag och kvällstid. Innehållet har ingen tydlig koppling till läroplanernas kurser. Strukturen kan variera från löst sammansatta grupper till mer styrda studiecirklar med en tydligt utpekad ledare. Syftet med klubben/cirkeln behöver inte ha en tydlig progression eller i förväg utpekad innehåll.
Tävlingsmatematik	Att delta i olika matematiktävlingar. Individuellt eller i grupp. Det finns en mängd olika matematiktävlingar att välja bland: lokala skolmästerskap, Kängurutävlingen, regionala grupp/klasstävlingar, nordiska mästerskap, olympiader m.m. Även rena tävlingsmatematiska träningsläger förekommer.
Studentkonferenser	Konferenser som syftar till att stimulera matematisk nyfikenhet och föra samman elever med intresse för matematik. I Sverige finns bland annat Sonja Kovalevsky dagarna och interna konferenser hos vissa skolhuvudmän.

Vissa verksamheter är per definition inte möjliga eller lämpliga att genomföra på elevernas skolor. Ofta är det ett universitet eller en högskola som står som ansvarig för dessa verksamheter och i den mån det krävs fysiska träffar sker de då vanligtvis på lärosätet.

Verksamheter utanför skolan	
Universitetskurser	Elever som när de genomför grundskolan eller gymnasiet samtidigt läser på universitet eller högskola. Formellt kan elever inte antas till högskolan innan de har en gymnasieexamen, men detta löses vanligen genom lokala överenskommelser. Eleverna kan därför inte få högskolepoäng dokumenterade innan de har gymnasieexamen.
Distanskurser	Hit räknas kurser med undervisning på distans som inte är universitets- eller högskolekurser. Idag bedrivs oftast distanskurser i form av webkurser med inslag av både föreläsningar, seminarier och chattar, vilket gjort att kursformen närmast sig den traditionella undervisningen. Sommarkurser i problemlösning och Matematikersamfundets korrespondenskurs är två exempel på distanskurser.
Handledning av universitetslärare	Verksamheter där en elev regelbundet träffar en universitetslärare och får handledning av denne. Många elever träffar disputerade matematiker på sin gymnasieskola, men då syftet inte är handledning av en enskild elev utan undervisning av en grupp, exkluderas dessa fall här. Däremot faller handledning av gymnasiearbete och privatundervisning i hemmet inom ramen för verksamheten.

Ovanstående kategorisering ligger till grund för analysen i den första av de två ingående artiklarna. I artikeln behandlas matematiskt begåvade ungdomars erfarenheter av deltagande i olika verksamheter.

Motivation

I föregående kapitel behandlades matematiska verksamheter, vilket är den första av de två påverkansfaktorer som undersöks i studien. Den andra påverkansfaktorn som undersöks i studien är motivation och det är om detta som framförvarande kapitel ska handla om. I kapitlet beskrivs några allmänna motivationsteorier som använts inom matematikdidaktisk forskning. Urvalet av teorier är ingalunda heltäckande, men teorierna som presenteras relaterar till varandra och skapar också en grund för självbestämmandeteorin som använts vid analysarbetet i den andra artikeln. Självbestämmandeteorin ges på grund av sin särställning i detta arbete större utrymme än övriga teorier. Avslutningsvis beskrivs motivation i relation till begåvningsforskning och matematiskt begåvade ungdomar.

Självbestämmandeteorin och andra motivationsteorier

En av de teorier som har haft störst inflytande på modern motivationsforskning är Albert Banduras (1977) teori om tro på den egna förmågan⁴ (Alexander & Murphy, 2000). En individs tro på sin egen förmåga att klara en uppgift är ytterst relaterad till den specifika situationen. Detta innebär att individens tro att klara av uppgifter varierar beroende på en rad faktorer. De betingelser som påverkar individens tro att klara uppgiften beror på a) vilken uppgift individen ska lösa, b) hur lång tid som erbjuds, c) vilka hjälpmedel som står till buds och d) övriga förhållanden. Individens tro på sin egen förmåga kommer alltså att varierar mellan olika ämnen och är både uppgifts- och situationsspecifik (Skaalvik & Skaalvik, 2015). Studier visar att individer som har en stark tro på den egna förmågan är mer motiverade att anstränga sig, möter motgångar bättre och tenderar att ha större uthållighet i sitt arbete (Beamer, Lundberg, & Randhawa, 1993; McCoach, 2007; Skaalvik & Skaalvik, 2015).

Bandura undersökte redan 1981 effekten av den upplevda självförmågan hos svaga elever inom aritmetik och fann att intresset ökade med stigande tro på självförmågan (Bandura & Shunk, 1981). Att teorin också används vid flera andra studier av matematikundervisning framgår av Alexander och Murphys

⁴ “Self-efficacy belief” eller vanligare bara “self-efficacy”

(2000) genomgång av 68 forskningsartiklar kopplade till motivation och utveckling. Ett exempel är Pajares och Kranzlers studie (1995) vars resultat visar att tron på den egna förmågan har en direkt inverkan på både matematikängslan och problemlösningsförmåga. McCoach har med samma teori också kunnat visa att lärare genom utbildning kan bli bättre på att öka elevers tilltro till sig själva (McCoach, 2007), vilket då skulle gynna motivationen hos eleverna. Kitsantas, Cheema och Ware (2011) argumenterar för betydelsen av att lärare verkligen försöker höja tron på den egna förmågan hos sina elever. Banduras teori är allmän och gäller alltså även för lärare, något som poängteras av Skaalvik och Skaalvik (2015). För att lärare ska kunna genomföra ett bra jobb måste de också känna tro på sig själva och uppfatta att de kan lyckas med sina uppdrag.

Efter Banduras teori introducerades ett annat viktigt bidrag till förståelsen om hur vi ska förstå motivation och mänskligt handlande, den så kallade teorin om förväntningar och värden (expectancy-value theory). Teorin skapades av Eccles och Wigfield (2000) på tidigt 80-tal och har en del gemensamt med Banduras teori (1977). Eccles och Wigfield skriver att beteenden som har ett motiv, till exempel att jogga eller studera matematik, i grunden bygger på de förväntningar individen har på att lösa uppgiften och på det värde individen tillmäter aktiviteten (Eccles & Wigfield, 2000). Ett högt värde och stor förväntan om att lyckas gör oss alltså motiverade och omvänt är vi omotiverade till att göra saker som vi tycker är oviktiga och tror att vi ska misslyckas med.

Teorin om förväntningar och värden skiljer på olika värden av aktiviteter och delar in en aktivitets värde i fyra olika kategorier: inre värde, nyttovärde, personligt värde och kostnad (Skaalvik & Skaalvik, 2015). Denna indelning påminner till viss del om den uppdelning som Deci och Ryan (2000 a) gör i sin självbestämmandeteori (se nedan).

Eccles och Wigfields teori har bland annat använts för att analysera varför män är överrepresenterade inom matematikutbildningar (Dicke, Flunger, Gaspard, Trautwein, & Nagengast, 2015) och till att ta reda på om matematiskt begåvade elever är mer motiverade till att lära än vad andra elever är (Andersen & Cross, 2014).

Föreställningen att motivation kan delas upp i inre och yttre motivation har funnits länge. I Deci och Ryans självbestämmandeteori (Self determination theory, SDT⁵) problematiseras denna förenklade uppdelning och teorin är idag den mest inflytelserika teorin på området (Skaalvik & Skaalvik, 2015). Det är egentligen sex olika teorier som ligger bakom självbestämmandeteorin och därför kan den betraktas som en metateori där varje underteori behandlar olika aspekter av motivation. Centralt för teorin är dels att motivation ska värderas efter kvalitet och inte efter kvantitet och dels att individens grad av självbestämmande påverkar motivationen. Rädslan för bestraffning kan få elever att

⁵ I Skaalvik och Skaalvik (2015) används termen medbestämmandeteorin.

studera matematik, men de kommer inte tycka om ämnet och knappast nå några större framgångar på längre sikt. Troligen tvärt om.

Självbestämmandeteorin skiljer på olika former av motivation, vilka beror på i hur hög grad individen upplever självbestämmande (Deci & Ryan, 2000b). Den högsta formen av motivation är *inre* motivation och brukar exemplifieras med barns lek. Det vill säga aktiviteter som vi gör för att vi tycker om dem.

Den yttre motivationen delas in i kategorierna *kontrollerad* och *autonom* yttre motivation, vilka i sin tur delas in i ytterligare två underkategorier (Figur 2). Kännetecknande för den autonoma motivationen är att individen upplever sig vara motiverad av personliga skäl. Autonom motivation delas in i motivation med *integrerad* och *identifierad* kontroll. Den *integrerade* kontrollen innebär att individen upplever att beteendet är en del av personligheten. Det kan innebära att eleven tagit till sig skolans värderingar om att studier är viktigt och gjort dem till sina egna eller att individen vill vara bäst. Den *identifierade* kontrollen innebär att individen själv har identifierat ett behov av ett visst beteende, till exempel att studera för att komma in på "rätt" utbildning eller träna för att bli brandman.

Motivation	Amotivation	Kontrollerad yttre motivation		Autonom yttre motivation		Inre motivation
		Yttre Kontroll	Introjicerad kontroll	Identifierad kontroll	Integrerad kontroll	
Upplevd kontroll	Handlingen utförs inte					Inre kontroll
Lokalisering av kontroll	Avsaknad av kontroll	Utanför individen	Delvis utanför individen	Delvis inom individen	Inom individen	Inom individen
Motivationsfaktor	Ingen motivation	Yttre styrning, belöning/ bestraffning	Inre styrning, belöning/ bestraffning	Viktigt för individen	Del av identiteten	Medlet är målet
Beskrivning	Likgiltighet	Belöning/ Straff	Socialt tryck	Nyttovärde	Identitet	Glädje

Figur 2 - Taxonomi för inre och yttre motivation

I de två formerna av yttre kontrollerad motivation är det inte främst individen som vill genomföra handlingen utan någon annan. I motivationsformen *introjekterad* kontroll har individen införlivat andras värderingar till exempel föräldrars förmaningar om att man ska studera. Att inte studera kan då ge upphov till skuld känslor och individen studerar för att undvika detta outtalade ”straff”. I den lägsta formen av yttre motivation, *yttre kontrollerad*, är det uttalat att individen utför handlingen för att få en belöning eller för att undslippa straff. Elever som studerar för att få pengar eller slippa utskällning är exempel på denna motivationsform. Amotivation slutligen innebär att handlingen inte genomförs. Individen bryr sig helt enkelt inte, vilket till exempel visar sig i att en elev struntar i att plugga till ett prov.

Deci och Ryans teori har använts flitigt inom forskning om undervisning. Bland annat har den betydelse som inre motivation har för framtida studieresultat framkommit i en metastudie som presenteras av Mageau och hans kollegor (Mageau, o.a., 2014). Det visar sig också att inre motivation i klassrummet har effekter på studierna i hemmet. Detta framkommer i en studie där man såg att benägenheten att göra matematikläxor ökade i takt med elevernas känsla av inre motivation i den ordinarie undervisningen (Hagger, Sultan, Hardcastle, & Chatzisarantis, 2015). Søyvik och Valås (1993) påvisar att elevers grad av inre motivation är påverkansbar och att den till viss del beror på undervisningens grad av kontroll. Att motivationen varierar beroende på lärmiljön styrks också av Hannula (2006) som argumenterar för att de viktigaste faktorerna för elevers uppsatta lärmål är de psykologiska behoven autonomi, kompetens och social tillhörighet. Detta påstående ligger helt i linje med självbestämmandeteorins uppfattning om motivation. Man uppfattar nämligen miljöer som uppfyller dessa tre psykologiska behov som starkt främjande för de mest kvalitativa formerna av motivation. Särskilt vikten av autonomi brukar betonas. Flera studier visar också att lärare kan stödja dessa former av motivation hos sina elever (Skaalvik & Skaalvik, 2015).

Sammanfattningsvis visar alla ovanstående teorier att motivationen har en mycket viktig roll vid all form av lärande, att motivationen är starkt påverkansbar och att lärare har stora möjligheter att öka sina elevers motivation. I den här studien har självbestämmandeteorin använts för att kategorisera olika former av motivation hos matematiskt begåvade ungdomar.

Motivation och begåvning

Motivation innehar en särställning inom begåvningsforskningen och många modeller som förklarar begåvning har som tidigare nämnts motivation som en viktig faktor (Subotnik, Olszewski-Kubilius, & Worrel, 2011; Ziegler, 2010). Detta gäller till exempel Renzullis (1978) treringsmodell som anger ”task

commitment”, som ett av tre karaktärsdrag hos begåvade individer. Även i den modell som ligger till grund för denna studie - den triadiska interdependensmodellen - utgör motivation en viktig faktor för att kunna förverkliga individens potential (Mönks & Ypenburg, 2009). Flera begåvningsforskare argumenterar också för att motivation är helt centralt för att förstå de begåvade individernas prestationsförmåga (Subotnik, Olszewski-Kubilius, & Worrel, 2011). Traditionellt sett har hög begåvning oftast förknippats med inre motivation, men på senare tid har forskare kunnat konstatera att akademiskt begåvade också drivs av yttre faktorer som till exempel att visa sina förmågor genom prestationer (Subotnik, Olszewski-Kubilius, & Worrel, 2011).

Krutetskiis (1976) studie handlar inte explicit om motivation, men det betonas att utan drivkrafter att vilja lära sig matematik kommer inte individen att nå särskilt långt. Det är intresset och passionen för matematik som är den bästa drivkraften och samtliga av Krutetskiis matematiskt begåvade ungdomar visar prov på ihärdighet och uthållighet i lösandet av matematiska problem. Uppfattningen att matematiskt begåvade ungdomar har stark motivation för ämnet bekräftas också i två genomförda svenska studier på matematiklärare och lärarstudenter. I den första studien framkom motivation som det vanligaste karaktärsdraget när 34 slumpvis valda matematiklärare uppmanades att beskriva matematiskt begåvade elever (Mattsson, 2010). I den andra studien, som undersöker svenska lärarstudenter, framkommer ett liknande resultat. Sammanlagt 85 procent av de tillfrågade studenterna uppgav olika former av inre och yttre motivation som karaktäriserande för matematiskt begåvade elever (Sumpter & Sternevik, 2013).

Syfte och frågeställning

Som framgått av tidigare kapitel finns det flera olika modeller som förklarar begåvning. Gemensamt för de flesta är att motivation och undervisning anses vara viktiga påverkansfaktorer. Med detta i beaktande är syftet med föreliggande studie att undersöka dessa påverkansfaktorer. Mer preciserat studeras erfarenheter av deltagande i matematiska verksamheter samt några aspekter av motivationens betydelse hos matematiskt begåvade elever i gymnasieskolan.

Syftet konkretiseras i fyra frågeställningar varav de två första besvaras i artikel 1 och de två senare i artikel 2. Frågeställningarna är:

1. Hur uttalar sig matematiskt begåvade elever om de matematiska verksamheter de deltagit i under skolåren?
2. Vilka skillnader går att skönja i elevernas utsagor gällande omfattning och betydelse av deltagande i de olika verksamheterna?
3. Vilka av självbestämmandeteorins motivationsformer framträder i samtal med matematiskt begåvade elever?
4. Skiljer de matematiskt begåvade ungdomarna sig åt gällande motivationsprofil?

Genomförandet av den empiriska studien presenteras i nästkommande kapitel och följs av analysmetod och resultat.

Metod

I föreliggande kapitel presenteras de metodologiska överväganden som ligger till grund för den empiriska studien, genomförandet av datainsamlingen, bakgrundsinformation om studiens deltagare samt etiska överväganden. Strukturen på kapitlet följer i stort sett kronologisk ordning, med undantaget avsnittet om etiska överväganden som placerats sist.

Först beskrivs identifieringsprocessen av de matematiskt begåvade elever som ingår i studien. Efter det inledande stycket presenteras urvalsförfarandet och val av datainsamlingsmetod. Samtalsintervjuer används som huvudsaklig datainsamlingsmetod i den empiriska studien, men intervjuerna föregicks av en enkätstudie. Resultatet av enkätstudien ger bakgrundsdata om deltagarna i intervjustudien och därför presenteras resultatet av enkätstudien redan i detta kapitel och inte som ett resultat av studien. Avslutningsvis kommenteras de etiska överväganden som gjorts under studiens gång.

Identifiering

Det första metodologiska övervägandet handlade om att identifiera vilka elever i den svenska skolan som kan anses vara matematiskt begåvade. Traditionellt har flera olika identifieringsmetoder används. Metoderna har också ofta kombinerats med varandra. Höga betyg, lärares omdöme, föräldrars omdöme, elever vid spetsgymnasier och resultat på standardiserade tester är några möjliga vägar att gå. Alla med sina förtjänster och brister. Identifieringsprocessen är av naturliga skäl intimt förknippat med hur man väljer att definiera matematisk begåvning. I denna studie är det Krutetskii's förmågor som ger definitionen av begåvning och identifieringsprocessen måste då samspela med Krutetskii's definition. Krutetskii betonar vikten av matematisk problemlösning (Krutetskii, 1976). Elever som är bra på problemlösning och i stor utsträckning använder sig av de förmågor som Krutetskii beskriver är alltså att betrakta som matematiskt begåvade. De förmågor som Krutetskii identifierade är inte identiska med de förmågor som uttrycks i grundskolans och gymnasieskolans ämnesplan i matematik, vilket får till följd att resultat på nationella prov inte nödvändigtvis pekar ut samma elever som här avses vara matematiskt begåvade. Elever med höga provresultat brukar, som tidigare nämnts, be-

nämnas högpresterande elever. Generellt gäller också att högpresterande elever inte nödvändigtvis är begåvade och att begåvade elever inte alltid presterar på topp (t.ex. Mellroth, 2014; Mönks & Ypenburg, 2009; Pettersson, 2011).

Huvudsyftet med matematiktävlingar är problemlösning och de utgör i sammanhanget därför en bättre ingång till matematisk begåvning än vad höga betyg gör. För att identifiera de elever i den svenska skolan som kan anses vara matematiskt begåvade används därför i denna studie matematiktävlingar som identifieringsverktyg. Även Pettersson (2011) använde resultat från matematiktävlingar för att identifiera matematisk begåvning i några av hennes fallstudier. Kortfattat lyder resonemanget så här: för att prestera bra på matematiktävlingar måste man vara en duktig problemlösare, om man är en duktig problemlösare så använder man Krutetskiis matematiska förmågor i hög utsträckning, vilket är det samma som att vara matematiskt begåvad. Det betyder dock inte att alla matematiskt begåvade elever vill eller kan prestera bra i tävlingar, men det är i detta sammanhang av mindre betydelse.

Urval

Under urvalsprocessen, gällde det att välja en grupp elever som var tillräckligt matematiskt begåvade. Med utgångspunkten att eleverna skulle vara duktiga problemlösare och därigenom prestera goda resultat på matematiktävlingar var nästa steg att finna en lämplig tävling för syftet. Som tidigare nämnts finns det en mängd olika tävlingar att välja mellan. Syftet i studien riktar in sökprocessen på gymnasieelever och då är Skolornas matematiktävling naturlig att välja av flera skäl. Tävligen är rikstäckande, vilket gör att elever från hela Sverige deltar. Tävligen arrangeras av Matematikerförbundet och tjänar som en första uttagning till matematikolympiaden, vilket garanterar att de bästa deltagarna verkligen är att betrakta som matematiskt begåvade. Tävlingsbidragen bedöms centralt av matematikerförbundet, vilket gör urvalsprocessen mer trovärdig och minskar risken för godtycklighet. Kvalskrivningen genomförs på landets skolor, men vid finalen samlas alla finalister på ett av landets universitet eller högskolor, vilket praktiskt underlättade datainsamlingen. De som valdes ut att ingå i studien var alltså samtliga finalister i Skolornas matematiktävling.

Antalet deltagare i Skolornas matematiktävling har de senaste åren legat på runt 1 000 deltagare per år, vilket utgör mindre än en procent av landets gymnasieelever. Detta får till följd att många matematiskt begåvade ungdomar i Sverige med stor sannolikhet inte ingår i urvalsgruppen då flera av dem inte deltar i tävligen. Men urvalet innebär också att de som valts ut (finalisterna) troligtvis är bland de bästa eleverna på matematisk problemlösning som finns i Sverige. I vart fall bland de som deltar i matematiktävlingar.

Metodval

Det går att undersöka påverkansfaktorer hos matematiskt begåvade elever på flera sätt. I detta avseende är studien starkt inspirerade av Benjamin Blooms (1985) expertstudie på 120 världsledande individer inom matematik, neurologi, tennis, simning, piano och skulptur. I Blooms studie använde forskarna i huvudsak intervju för att samla in data om studiens experter. Intervjuerna genomfördes utöver med experterna själva också med föräldrar och lärare till experterna. Detta hade varit önskvärt även i denna studie, men bedömdes vara alltför resurskrävande för att rymmas inom en licentiatuppsats. Detta ledde i sin tur till att syfte och forskningsfrågor tidigt blev inriktade på individens uppfattning om världen och de påverkansfaktorer som studien riktade sig mot snarare än en faktisk beskrivning av ett händelseförlopp. Med ovanstående i beaktande valdes intervju som metod för att besvara studiens syfte och frågeställningar. Kvale och Brinkman bekräftar också att metoden är särskilt lämplig vid denna typ av forskning:

[D]en kvalitativa forskningsintervjun söker förstå världen från undersökningspersonens synvinkel, utveckla mening ur deras erfarenheter ...
(Brinkman & Kvale, 2009, s. 17).

Att välja intervju som metod stärks också av Blooms erfarenheter efter fyra års intervjustudier av individer med expertis inom särskilda domäner:

[...] we acquired greater and greater confidence in the value of the retrospective-interview approach to the study of talent development.
(Bloom & Sosniak, 1985, s. 16).

Då datainsamlingen skulle ske med intervju som metod var nästa steg således att välja ut de finalister som skulle ingå i intervjustudien. En mindre enkätstudie erbjöds samtliga finalister då de var samlade på finaldagen. Enkätstudien syftade till att ge underlag för den sista urvalsprocessen av deltagare till intervjustudien och skulle samtidigt ge bakgrundsinformation och förståelse för finalisterna som grupp. Resultat av enkätstudien presenteras lite längre fram under rubriken "Deltagarna i studien".

Enkät och intervjustudie

Datainsamlingen inleddes med en pilotstudie med tre tidigare finalister. Pilotstudien syftade dels till att ta fram underlag för enkäter och intervjuer samt att verifiera intervjumetod som en funktionell metod för att tjäna studiens syfte och frågeställningar. Utifrån resultat av pilotstudien och Mönks flerfaktormodell skapades enkäten [se bilaga 1], vilken senare låg till grund för intervjuerna. Syftet med detta tillvägagångssätt var att få möjlighet att validera och

precisera de svar som respondenterna lämnat i enkätstudien. Syftet med enkäten var dels att få en bättre förståelse för finalisterna som grupp och dels kunna hitta skillnader mellan ungdomarna. Enkätsvaren kunde också tänkas ge inspiration till den stundande intervjustudien. Exempel på frågor som enkäten skulle besvara var om finalisterna var generellt högpresterande, matematiskt högpresterande eller inte högpresterande alls (i betydelsen höga betyg i matematik). Hade finalisterna fått stöd under skoltiden för att utveckla sina matematiska förmågor? Hade föräldrar eller andra närstående haft någon betydelse för den matematiska utvecklingen?

Cirka 1 000 elever deltog i kvaltävling i Skolornas matematiktävling. Av dessa gick 29 deltagare vidare till final. Med matematikersamfundets godkännande genomfördes en enkätstudie med finalisterna efter att de genomfört finalskrivningen. Utöver grunddata innehöll enkäten grundläggande frågor om elevernas familjesituation, skolgång, betyg och vad som motiverade dem att lära sig matematik [se bilaga 1]. 27 finalister valde att fylla i enkäten och två avstod.

Från de 27 enkätsvaren valdes 16 finalister ut till intervjustudien. Målsättningen var att få så stor spridning som möjligt bland respondenterna i syfte att få en så nyanserad, rik och bred bild som möjligt. Deltagarna valdes alltså utifrån de skillnader som gick att se i enkätsvaren avseende pedagogisk miljö (t.ex. om de hade föräldrar med eller utan akademisk utbildning, om de gick på ett spetsgymnasium i matematik eller i en vanlig klass o.s.v.). Att det blev just 16 finalister som valdes ut till intervjustudien berodde på gruppens sammansättning och var inte på förhand bestämt. Respondenterna som ingår i studien är en form av strategiskt urval utifrån principen maximal variation. Detta förfarande är en användbar metod vid undersökningar som handlar om individers olika uppfattningar (Esaiasson, Gilljam, Oscarsson, & Wängnerud, 2007). Finalisterna utgör en liten grupp av mängden matematiskt begåvade elever. Det slutliga urvalet ger dock en lite större spridning än om till exempel endast manliga finalister, elever från spetsgymnasier eller elever med två föräldrar med akademisk utbildning valts. Förhoppning var att få fram fler uppfattningar om de påverkansfaktorer som undersöks, än om respondenterna liknat varandra i större utsträckning.

Av de 16 utvalda finalisterna intervjuades 15 (en avböjde på grund av tidsbrist) under tidsperioden januari till april. Intervjuerna varade mellan 30 och 75 minuter och genomfördes på elevernas ordinarie skolor efter det att tillstånd inhämtats från ansvarig skolledare. Alla intervjuer spelades in utom i ett fall då anteckningar togs eftersom respondenten inte ville bli inspelad. I den första artikeln utgjorde anteckningarna ingen begränsning, men eftersom analysen i den andra artikeln bygger på kvantifiering av citat kunde inte anteckningarna användas. Detta leder till att resultaten i artikel 1 grundar sig på 15 respondenter och resultaten i artikel 2 grundar sig på 14 respondenter. Samtliga deltagare och skolor har av integritetsskäl fått fingerade namn.

Eftersom jag träffat samtliga respondenter vid finaltillfället inleddes samtliga intervjuer med frågor om skolornas matematiktävling i syfte att få igång samtalet. Efter dessa inledande frågor fick respondenterna berätta om när de själva förstod att de var matematiskt begåvade och utifrån det svaret följde intervjun i stort sett uppväxt och skolgång i kronologisk ordning, med möjlighet till sidospår och kompletterande frågor. De teman som behandlades under intervjun var de som behandlats i enkäten, vilka utgick från Mönks modell om påverkansfaktorer (Figur 1). Det gällde alltså familj, vänner, skola och motivation⁶. För att få ett så naturligt samtal som möjligt följde frågorna respondentens berättelse och stor hänsyn togs till de individuella skillnaderna hos de intervjuade. Frågor om till exempel motivation eller matematiska verksamheter ställdes alltså då det passade in och inte utifrån en tidigare bestämd ordning. I de fall som påverkansfaktorerna inte naturligt avhandlades under intervjun ställdes kompletterande frågor på slutet. Intervjuerna avhandlade flera teman än vad som presenteras i detta arbete.

Efterhand intervjuerna genomförts transkriberades de med fokus på respondenternas utsagor, vilket innebär att talspråk i viss utsträckning har gjorts om till skriftspråk. Transkripten har för denna uppsats endast analyserats utifrån matematiska verksamheter som respondenterna deltagit i under sin skolgång (artikel 1) och olika former av motivation hos respondenterna (artikel 2).

Deltagarna i studien

Huvudsaklig datainsamlingsmetod i denna studie är intervju och de resultat som presenteras i de båda artiklarna utgår främst från det som framkommit i intervjuerna. Dock föregicks intervjustudien som tidigare nämnts av en enkätstudie för att slutföra urvalsprocessen och öka bakgrundsinformation om studiens deltagare. Nedan (Figur 3) presenteras resultatet av enkätstudien i syfte att ge bakgrundsinformation av deltagande elever.

⁶ Kreativitet och höga intellektuella förmågor utelämnades från intervjun. Detta eftersom faktorerna dels är svåra att undersöka i en intervjusituation och dels är svåra för individen att ha en adekvat uppfattning om.

		Enkät n = 27	Intervju n = 15
Kön	Män	21	10
	Kvinnor	6	5
Årskurs	Årskurs 2 gymnasiet	13	7
	Årskurs 3 gymnasiet	14	8
Program	Naturvetenskapsprogrammet (ordinarie eller annan inriktning än matematik)	7	6
	Naturvetenskapsprogrammet med matematikinriktning	18	7
	IB - International Baccalaureate	2	2
Utbildningsnivå föräldrar	Föräldrar med akademisk utbildning	25	13
	Ingen förälder med akademisk utbildning	2	2
Anhörigas betydelse för matematisk utveckling	Föräldrarna eller annan närstående mycket viktiga för matematisk utveckling	11	8
	Annan närstående lite viktig för matematisk utveckling	12	5
	Ingen närstående viktig för matematisk utveckling	4	2
Betyg matematik	Högsta betyg i alla matematikkurser	27	15
Betyg andra ämnen	A eller B i alla eller nästan alla ämnen	24	13
	A i matematik, men i övrigt blandade betyg	3	2

Figur 3 - Bakgrundsdata över studiens deltagare

Sammanlagt 29 elever tog sig till final i skolornas matematiktävling av dessa valde 27 att fylla i enkäten och två valde att avstå. Av de 27 finalisterna deltog 15 i intervjustudien. Finalister bestod av 21 män och sex kvinnor. Alla finalister läste på det naturvetenskapliga programmet utom två som läste på International Baccalaureate, IB. Av de 25 som gick på det naturvetenskapliga

programmet läste 18 elever ett program med matematikprofil. Med matematikprofil avses antingen ett riksrekryterande spetsgymnasium eller en lokal anpassning som erbjuder matematisk specialisering av något slag. 14 av finalisterna läste tredje året på gymnasiet och 13 läste andra året. Alla finalister hade enligt egen utsago högsta betyg i matematik. Alla utom tre hade dessutom A eller B i alla eller nästan alla ämnen.

Av de 15 elever som intervjuades var tio män och fem kvinnor. Samtliga hade högsta betyg i matematik och 13 av dem hade A eller B i alla eller nästan alla ämnen. Alla utom två uppger att deras föräldrar eller annan nära anhörig bidragit till den matematiska utvecklingen. 13 av respondenterna lever i hem där en eller båda föräldrarna har akademisk utbildning. Två elever läser IB och övriga 13 elever läser på det naturvetenskapliga programmet. Sju av dem går andra året och åtta går tredje året på gymnasiet. Av de 13 som läser på det naturvetenskapliga programmet läser sju med inriktning matematik.

Etiska överväganden

Att noggrant överväga de etiska frågor som uppkommer i och med en empirisk studie med deltagande ungdomar är av yttersta vikt. Det finns till viss del alltid en intressekonflikt mellan deltagarnas integritet och behovet av transparens i genomförandet. I vissa fall måste också resultatets betydelse vägas mot deltagande individers behov av skydd (Larsson, 2005). Det är alltså inte ett absolut skydd av integriteten utan ett rimligt övervägande som forskaren måste göra.

I denna studie har principerna från vetenskapsrådets "God forskningssed" (2011) och "Forskningsetiska principer inom humanistisk-samhällsvetenskaplig forskning" (2002) beaktats. De etiska övervägandena kommer till uttryck på flera sätt.

Samtliga deltagare informerades om vad deras medverkan innebar, att medverkan var frivilligt och att de när som helst kunde avbryta studien. Två av deltagarna i enkätstudien valde att svara anonymt och en av respondenterna ville inte bli inspelad.

Då ingen av de deltagande individerna var under 15 år och forskningsfrågorna inte bedömdes vara av etisk känslig natur ansågs det inte nödvändigt att tillfråga vårdnadshavarna. Däremot inhämtades tillstånd för att få genomföra intervjuerna på respektive elevs skola från ansvarig rektor i god tid innan intervjutillfället.

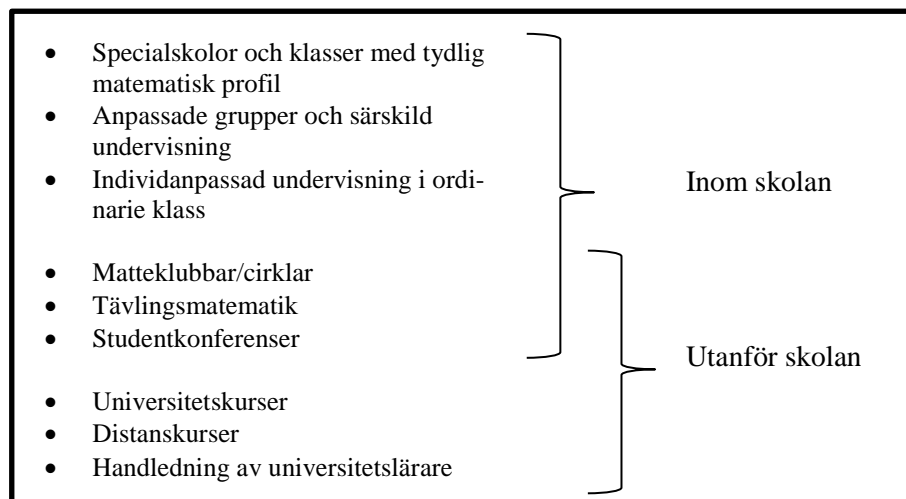
Alla ljudfiler och transskript har behandlats konfidentiellt och samtliga respondenters namn samt namn på skolor är fingerade för att undvika igenkänning. Ingen del av forskningsmaterialet har används i annat syfte än min egen forskning.

Analys

Det insamlade datamaterialet har analyserats med avseende på matematiskt utvecklande verksamheter samt olika former av motivation hos studiens deltagare. Uppdelningen är densamma som i de ingående artiklarna och presenteras nedan var och en för sig.

Verksamheter

Datamaterialet som bestod av 14 transkriberade intervjuer och en antecknad intervju analyserades med en innehållsanalys som grundade sig på Leikins (2009) kategorisering av matematiska verksamheter (Figur 4). Efter att ha läst transkripten anpassades de ursprungliga verksamheterna för att bättre svara mot det svenska skolsystemet och studiens datamaterial. I analysen beaktas enbart verksamheter som är utöver normal undervisning. För de deltagande respondenterna kan det dock handla om vanlig undervisning eftersom flera av dem går i en klass med matematikprofil. Sammantaget är det nio olika kategorier med verksamheter som fördelas beroende på om de organiseras inom skolan (specialskolor eller klasser med tydlig matematisk profil, anpassade grupper och särskild undervisning, individanpassad undervisning i ordinarie klass), utanför skolan (universitetskurser, distanskurser, handledning av universitetslärare) eller kan förekomma både inom eller utanför skolan (matteklubb/studiecirkel, tävlingsmatematik, studentkonferenser).



Figur 4 – Matematiskt stödjande verksamheter.

När verksamheterna hade bestämts och definierats lästes samtliga transkript. De utsagor som handlade om matematiska verksamheter kopierades och samlades under respektive verksamhetskategori. Utifrån kategoriseringen med respondenternas citat sammanställdes sedan hur många respondenter som deltagit i respektive verksamhet, hur respondenterna uttalat sig om verksamheten samt vilken betydelse respondenterna tillmätte respektive verksamhet. Resultat presenterades i en kvalitativ beskrivning av de olika verksamheterna.

Motivationsformer

Datamaterialet som bestod av 14 transkriberade intervjuer analyserades med en innehållsanalys i två steg med avseende på Deci och Ryans självbestämmande teori (2000 a). Inledningsvis valdes de utsagor som handlade om motivation och därefter kategoriserades de med hjälp av självbestämmandeteorins motivationsformer.

Konkret innebar det att samtliga meningsbärande utsagor som i de transkriberade intervjuerna ansågs handla om motivation kopierades, löpnummersattes och kopplades till en respondent. Med meningsbärande utsaga avses ett uttalande från respondenten som visar individens motivation för matematik. Utsagorna kunde alltså handla om individens känslor för matematik, vilka skäl som anges för att ägna sig åt matematik eller huruvida man ser matematik som ett intresse eller ett skolämne.

I den inledande fasen då alla utsagor som handlade om motivation skulle tas ut från transkripten togs även tveksamma utsagor med för att i det senare skedet kunna sorteras bort. När alla utsagor hade listats, anonymiserades och

blandades de i syfte att undvika förutfattade meningar som kunde finnas om de olika respondenterna. I några få fall kändes respondenten igen utifrån citatet, men i det flesta fall var utsagorna så kontextlösa att respondenten förblev anonym genom hela analyskedet. Analysmallen (Figur 5) visar de olika kategorierna, exempel på utsagor och kodbokstav. Kodningens funktion var att förenkla arbetet och underlätta förståelsen då bokstavsordningen ger rangordningen av de olika motivationsformerna. Det ligger alltså ingen djupare mening i kodbeteckningarna och benämningarna för de olika motivationsformerna hade i princip kunnat användas genomgående under hela arbetet.

Motivation	Amotivation	Kontrollerad yttre motivation		Autonom yttre motivation		Inre motivation
		Yttre kontroll	Introjerad kontroll	Identifierad kontroll	Integrerad kontroll	
Upplevd kontroll	Handlingen utförs inte	Yttre kontroll	Introjerad kontroll	Identifierad kontroll	Integrerad kontroll	Inre kontroll
Lokalisering av kontroll	Avsaknad av kontroll	Utanför individen	Delvis utanför individen	Delvis inom individen	Inom individen	Inom individen
Motivationsfaktor	Ingen motivation	Yttre styrning, belöning/ bestraffning	Inre styrning, belöning/ bestraffning	Viktigt för individen	Del av identiteten	Medlet är målet
Beskrivning	Likgiltighet	Belöning/ Straff	Socialt tryck	Nyttovärde	Identitet	Glädje
Exempel på utsagor	<i>Jag studerar inte.⁷</i>	<i>Jag studerar för att få pengar eller för att slippa straff⁸</i>	<i>"... och så fort det gått bra för mig har mamma sagt att jag ska plugga mer"</i>	<i>"... man måste plugga för att få ett bra betyg"</i>	<i>"det är en drivkraft för mig att vara bäst"</i>	<i>"det var mycket [matematik] hemma.[...] Det var liksom det jag tyckte var roligt."</i>
Kod	F	E	D	C	B	A

Figur 5 - Analysmall motivationsformer. Bearbetning av (Deci & Ryan, 2000 b).

Kategoriseringen genomfördes utifrån självbestämmandeteorins kategorier som kodades A-F (Figur 5). Motivationsformerna kodades i bokstavsordning där inre motivation kodades A och därefter i fallande ordning ned till amoti-

⁷ Citatet är påhittat. Ingen utsaga från respondenterna placerades i denna kategori.

⁸ Citatet är påhittat. Ingen utsaga från respondenterna placerades i denna kategori.

vation som kodades F. Till inre motivation (A) sorterades de utsagor som visade att individen gav uttryck för att matematik hade ett egenvärde eller att det var ett intresse för hen och inte bara ett skolämne. I kategori B placerades alla utsagor som gav uttryck för att individen hade en identitet som antydde att individen tyckte om att tävla, vara bäst eller att man alltid skulle göra sitt bästa. Utsagan handlade alltså mer om identitet eller personlig egenskap än om matematik. I kategori C hamnade de utsagor som gav uttryck för att matematik har ett nyttovärde. Antingen för att man behövde matematik för att bli bättre i ett annat ämne som fysik eller programmering eller för man behövde ett visst betyg för fortsatta studier. Till kategori D sorterades de utsagor som visade att respondenten upplevde ett socialt tryck från t.ex. föräldrar eller klasskamrater. Inget av respondenternas utsagor kunde knytas till kategori E (yttre kontroll) eller F (amotivation). Även negativa utsagor kategoriserades då det var möjligt. Till exempel kategoriserades utsagor av typen *”jag satt mest och gjorde ingenting, för jag hade redan högsta betyg”* in under kategori C då det indikerar att eleven studerar för att nå ett betyg. Utsagor som inte kunde kategoriseras antingen för att motivationsformen var tvetydig eller för att citatet var otydliga kategoriserades med X och har inte tagits med i resultatet.

Kategoriseringen genomfördes två gånger med tre månaders mellanrum. De utsagor som inte kategoriserades lika vid de två analystillfällena har diskuterats med ytterligare en forskare för att därefter kategoriseras eller avfärdas.

Innan resultat presenteras och diskuteras följer här en sammanfattning av de två artiklarna som ingår i uppsatsen.

Sammanfattning av artiklarna

Artikel 1

Artikeln syftar till att undersöka några matematiska verksamheter som antas stödja matematiskt begåvade elevers utveckling. Syftet preciseras i de två forskningsfrågorna:

- Hur uttalar sig matematiskt begåvade elever om de matematiska verksamheter de deltagit i under skollåren?
- Vilka skillnader går att skönja i elevernas utsagor gällande omfattning och betydelse av deltagande i de olika verksamheterna?

Datansamlingen genomfördes med en enkätstudie med 27 matematiskt begåvade ungdomar som valts ut på grund av att de tagit sig till final i Skolornas matematiktävling. 15 av de 27 finalisterna intervjuades med fokus på de påverkansfaktorer som ingår i Mönks (2009) begåvningsmodell. I artikeln presenteras resultat som behandlar respondenternas erfarenheter av matematiskt stödjande verksamheter. De verksamheterna som användes i analysen är 1) specialskolor eller klasser med tydlig matematisk profil, 2) anpassade grupper och särskild undervisning, 3) individanpassad undervisning i ordinarie klass, 4) matteklubbar/studiecirkel, 5) tävlingsmatematik 6) studentkonferenser, 7) universitetskurser, 8) distanskurser och 9) handledning av universitetslärare.

Respondenterna har deltagit i en mängd olika verksamheter som syftar till att utveckla deras matematiska förmågor och bibehålla deras intresse för matematik. Generellt uttalar sig ungdomarna positivt om alla verksamheter de deltagit i. Inom ramen för skolan uppskattas främst de tillfällen då eleverna haft specialundervisning och/eller tillåtits accelerera. De stunder eleverna upplevt att de bromsats av sina lärare genom att tvingas läsa samma kurs två år i rad har på motsvarande sätt uppfattats som tråkiga och meningslösa. Generellt uttalar sig eleverna mer positivt om sina gymnasieskolor än om sina respektive grundskolor. De främsta orsakerna som eleverna anger för detta är lärare med djupare ämneskunskaper, motiverade klasskamrater och totalt sett fler utmaningar. Av de verksamheter som skett utanför skolan uppfattas deltagande i olika tävlingar och den nära knutna korrespondenskursen som mest positivt.

Det går att se vissa skillnader i omfattningen och betydelsen av de olika aktiviteter som respondenterna deltagit i. Av de 27 elever som deltog i enkätstudien går 18 elever på ett naturvetenskapligt program med matematikprofil, vilket gör denna verksamhet till en av de mest omfattande. Övriga elever går på Naturvetenskapligt program eller IB med tillvalet avancerad matematik. Samtliga elever har deltagit i någon form av tävlingsmatematik, men skillnaderna är stora. Några elever har endast deltagit i Skolornas matematiktävling andra har regelbundet tävlat i olika tävlingar under flera års tid. De elever som inom ramen för skolan har fått accelerera och de som mer systematiskt har ägnat sig åt tävlingsmatematik, inklusive korrespondenskursen, tillmåtar dessa verksamheter mycket stor betydelse. Elevkonferenser, studiecirklar matematikklubbar samt handledning av universitetslärare förekommer i begränsad utsträckning och verkar inte haft någon större inverkan på eleverna i studien.

Artikel 2

Syftet med artikeln är att undersöka några aspekter av motivationens betydelse för matematiskt begåvade ungdomar. Mer specifikt ska följande frågeställningar besvaras:

- Vilka av självbestämmandeteorins motivationsformer framträder i samtal med matematiskt begåvade elever?
- Skiljer de matematiskt begåvade ungdomarna sig åt gällande motivationsprofil?

Den första frågeställningen behandlar alltså den intervjuade gruppen matematiskt begåvade ungdomar som helhet och den andra frågeställningen fokuserar eventuella skillnader gällande motivationsformer mellan individerna.

Datansamlingen genomfördes med en enkätstudie med 27 matematiskt begåvade ungdomar som valts ut på grund av att de tagit sig till final i Skolornas matematiktävling. 15 av de 27 finalisterna intervjuades med fokus på de påverkansfaktorer som ingår i Mönks (2009) begåvningsmodell. I artikeln presenteras resultat som behandlar olika former av motivation. Då en av respondenterna inte ville bli inspelad bygger analysmaterialet på övriga 14 respondenter. De 14 transkriberade intervjuerna innehållsanalyserades baserat på självbestämmandeteorins olika motivationsformer: A) Inre motivation; B) Autonom integrerad motivation; C) Autonom identifierad motivation; D) Kontrollerad introjicerad motivation; E) Kontrollerad yttre motivation F) Amotivation.

Genomgången av de 14 transkripten genererade sammanlagt 212 citat som kunde kopplas till motivation. Av dessa kategoriserades 198 och 14 bedömdes omöjliga att kategorisera. Av de 198 kategoriserade utsagorna tillhörde 127 kategori A det vill säga inre motivation. 30 citat kategoriserades som tillhörande kategori B, integrerad motivation. 37 placerades under kategori C, identifierad motivation. De fyra återstående citaten kategoriserades som D, introjerad motivation i form av höga förväntningar från föräldrarna. Inget av de 198 kategoriserade citaten tydde på att respondenterna studerade för att få belöningar eller undvika straff. Resultatet visar tydligt de vanligaste motivationsformerna hos respondenterna. Inre motivation framträder som den i särklass mest frekventa motivationsformen följt av de två olika formerna av autonom motivation (kategori B och C). De två autonoma motivationsformerna förekommer i stort sett i samma utsträckning. Övriga former av motivation kan på gruppnivå anses försumbara.

Gällande de individuella motivationsprofilerna är resultatet också tydligt. Samtliga elever i studien uttrycker att de känner glädje och inre motivation för att studera matematik. Samtidigt gör utsagorna också tydligt att samtliga elever också påverkas av andra motivationsformer. Eleverna uttrycker till exempel att de tycker om att vara bäst, att man alltid ska prestera så bra man kan eller att matematik är viktigt för deras framtida studier. Av studiens resultat verkar det alltså som att elever måste ha inre motivation, men att denna motivationsform inte ensam räcker för att nå så långt som studiens deltagare har gjort.

Resultat

I detta kapitel presenteras resultatet av studiens två analyser. Först presenteras resultatet av ungdomarnas utsagor om samt omfattning och betydelse av de matematiskt utvecklande verksamheter som de deltagit i under skolåren. Därefter presenteras resultatet av analysen som handlade om motivationsformer och motivationsprofiler hos studiens matematiskt begåvade ungdomar. En utförligare beskrivning av resultaten presenteras i de båda artiklarna som återfinns längs bak i uppsatsen.

Verksamheter

Resultatet bygger på intervjuer med 15 ungdomar och grundar sig på de nio verksamheter som användes i analysen (Figur 4 – Matematiskt stödjande verksamheter.). Verksamheterna som användes i analysen är 1) specialskolor eller klasser med tydlig matematisk profil, 2) anpassade grupper och särskild undervisning, 3) individanpassad undervisning i ordinarie klass, 4) matteklubbar/studiecirklar, 5) tävlingsmatematik 6) studentkonferenser, 7) universitetskurser, 8) distanskurser och 9) handledning av universitetslärare.

Specialskolor och skolor med tydlig matematisk profil är betydligt vanligare på gymnasiet än i grundskolan. 18 av 27 läser ett gymnasieprogram med matematisk inriktning och eleverna verkar generellt trivas bättre i gymnasiet än i grundskolan. De upplever att lärarna är mer kunniga i sina ämnen, att klasskamraterna är mer studiemotiverade och att de sammantaget får fler utmaningar, även om matematikundervisningen i många fall fortfarande anses vara för enkel.

Nästan alla intervjuade har stundtals haft *individanpassad undervisning i ordinarie klass*, vilket inneburit att de fått accelerera i ämnet eller fått berikande undervisning i form av olika matematiska problem. *Anpassade grupper och särskild undervisning* har främst förekommit i årskurs nio där fyra elever har fått läsa in första gymnasiekursen. Endast en av eleverna har haft särskild undervisning under samtliga skolår. Elevernas utsagor vittnar om att de uppskattat specialundervisningen och de perioder då de tillåtit accelerera. Det framkommer också att eleverna bromsats i sin utveckling genom att till exempel läsa samma kurs flera år i följd, något som av eleverna uppfattats som tråkigt och meningslöst. Det framstår av intervjuerna som om skolan sällan haft en uttalad policy gällande elever som lätt når kunskapskraven. Snarare

verkar det ha varit upp till enskilda lärare att avgöra hur de begåvade eleverna ska undervisas.

Studentkonferenser, matematikklubbar och studiecirkel verkar enligt respondenterna inte ha förekommit i någon större omfattning. De elever som deltagit i någon av dessa verksamheter är försiktigt positiva, men det har inte motiverat eleverna att studera mer i någon större utsträckning. Inte heller *handledning av universitetslärare* eller *universitetskurser* förekommer i stor skala. Endast två elever har läst universitetskurser som inte ingår i deras gymnasieprogram, vilket kan tyckas märkligt med tanke på att eleverna tillhör några av de bästa i landet.

Att alla studiens deltagare har erfarenheter av *tävlingsmatematik* är uppenbart, men omfattningen av erfarenheterna skiljer sig väldigt mycket åt mellan individerna. Några elever har endast deltagit i Skolornas matematiktävling och aldrig aktivt tränat tävlingsmatematik. För andra är det ett stort intresse som sysselsatt dem flera timmar i veckan under flera års tid. Gemensamt för alla är att de uppskattar tävlingsproblemen och de utmaningar som de erbjuder. Några elever uppger också att de tycker om själva tävlingsmomentet, men det gäller långt ifrån alla. Vissa elever uttrycker tvärtom att de inte vill vara bäst, eftersom det sätter fokus på person snarare än problemlösning.

Alla finalister erbjuds en korrespondenskurs som ges av matematikersamfundet, vilken delvis syftar till att utse de sex ungdomar som får representera Sverige i den internationella matematikolympiaden. Kursen uppfattas av studiens deltagare som krävande, men också mycket givande. För de respondenter som satsar på en plats i olympialaget är korrespondenskursen helt klart den mest betydelsefulla verksamheten. *Distanskurser* utöver korrespondenskursen förekommer annars i liten utsträckning och få av respondenterna har erfarenheter från denna verksamhetstyp.

Motivationsformer

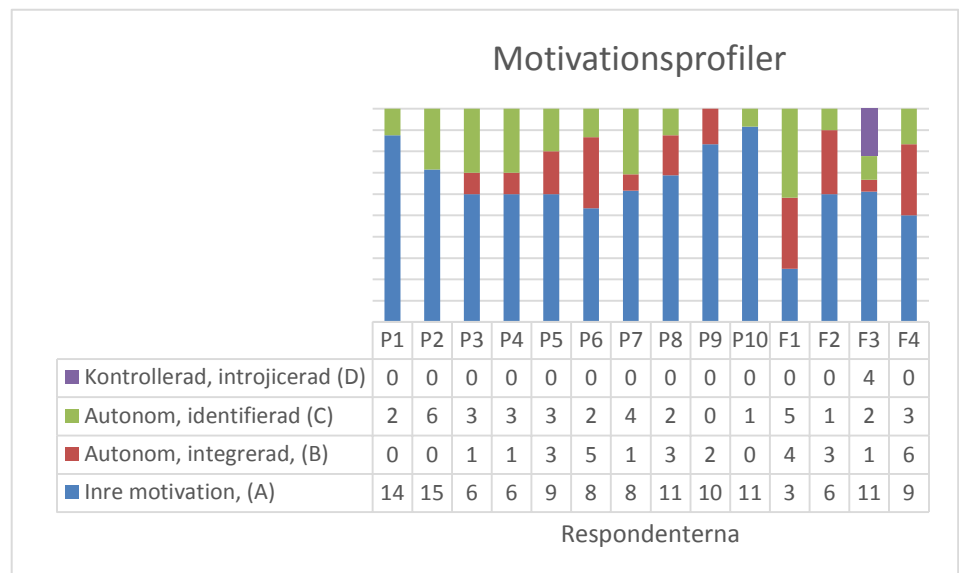
Resultaten som presenteras nedan bygger på genomgången av 14 transkriberade intervjuer. Av de 14 respondenterna var tio pojkar och fyra flickor (benämnda P1-10 respektive F1-4). Sammanlagt genererade intervjuerna 212 utsagor som kunde kopplas till motivation. Av de 212 utsagorna kategoriserades 198 och 14 bedömdes omöjliga att kategorisera. Av de kategoriserade utsagorna placerades 127 i kategori A, det vill säga inre motivation. 30 citat kategoriserades som tillhörande kategori B, integrerad motivation. 37 placerades under kategori C, identifierad motivation. De fyra återstående citaten kategoriserades som D, introjicerad motivation i form av höga förväntningar från föräldrarna. Inget av de 198 kategoriserade citaten tydde på att respondenterna studerade för att få belöningar eller undvika straff (Figur 6).

Summa kategoriserade citat – alla intervjuer	
A – Inre motivation	127
B – Autonom integrerad motivation	30
C – Autonom identifierad motivation	37
D – Kontrollerad introjicerad motivation	4
E – Kontrollerad yttre kontrollerad motivation	0
F – Amotivation	0
Summa	198

Figur 6 – Respondenternas motivationsformer

Sammanställningen ger en tydlig bild över de vanligaste motivationsformerna hos respondenterna. Inre motivation framträder som den i särklass mest betydelsefulla motivationsformen följt av de två olika formerna av autonom motivation (kategori B och C). De två autonoma motivationsformerna förekommer i stort sett i samma utsträckning. Övriga former av motivation kan på gruppnivå anses försumbara.

Det framkommer dock inte av ovanstående framställning hur fördelningen är för respektive individ. Genom att analysera citaten fördelade per individ går det att få en bild av respondenternas olika motivationsprofiler (Figur 7).



Figur 7 - Respondenternas individuella motivationsprofiler

Även i denna sammanställning går det att se vissa tydliga mönster. Alla respondenter drivs av inre motivation att lära sig ämnet. Matematiken har alltså ett egenvärde för studiens deltagare. Lika tydligt är också att ingen av respondenterna enkom drivs av inre motivation. Alla ger utöver inre motivation också uttryck för någon av de två autonoma motivationsformerna. Sammanfattningsvis visar studien att respondenterna i första hand drivs av inre motivation för matematik och i andra hand för att de själva anser ämnet viktigt. De har med andra ord inte ägnat sig åt matematik för någon annans skull än sin egen. Matematiken upplevs vara en viktig del av deras liv och att vara duktig i ämnet är en del av deras identitet.

Diskussion

I detta kapitel diskuteras resultaten i relation till tidigare forskning, metodologiska överväganden, förslag till framtida forskning och hur resultaten kan användas av verksamma inom den svenska skolan.

Resultaten i relation till tidigare forskning

De verksamheter för matematiskt begåvade barn som Leikin (2009) uppmuntar till uppskattas av studiens deltagare i den mån de har erfarenhet av dem. Studien ger dock ingen tydlig rangordning av vilka verksamheter som varit mest uppskattade. Dels är underlaget för litet och dels varierar verksamheternas utformning och organisation för mycket för att det ska gå att jämföra. Det framstår dock som tydligt att acceleration och tävlingsmatematik i olika former var det som tydligast gjort att eleverna utvecklats. Acceleration genom kurserna har tidigare visat sig ha en positiv effekt på utvecklingen (Sowell, 1993; Subotnik, Olszewski-Kubilius, & Worrel, 2011; Ziegler, 2010), vilket studiens resultat också indikerar. Men trots att acceleration alltså framstår som en högt uppskattad verksamhet är det endast två av respondenterna som läst universitetskurser som inte ingår i deras ordinarie gymnasieprogram.

Vad som gör att ungdomarna inte fortsätter sina matematikstudier i egen takt framgår inte av denna studie men det svenska skolsystemet är troligen en aspekt som påverkar. Flera respondenter uppger att de får tillräckligt med utmaningar totalt sett på sitt program, vilket gör att de är ganska nöjda med att inte behöva anstränga sig inom matematiken och för de som ändå vill utveckla sina matematiska förmågor finns korrespondenskursen som komplement. Vi vet att generell begåvning (Winner, 1999) liksom höga prestationer inom flera skolämnen (Skolverket, 2012) är ovanligt, men de flesta av studiens deltagare är just högpresterande inom flera ämnen. Då det ofta krävs höga antagningspoäng för fortsatta studier på högskola är det rationellt av ungdomarna i studien att fokusera höga betyg i samtliga ämnen i stället för att avancera inom matematik. Högskolan är ju den första utbildningsinstansen som i egentlig mening tillåter specialisering inom ett ämne. Eftersom flera respondenter vittnar om att det går för långsamt i matematikundervisningen borde dock matematikundervisningen kunna organiseras på ett annorlunda sätt för att möta dessa ungdomars behov.

Tidigare forskning gällande berikande undervisningsåtgärder är inte entydiga och inga tydliga resultat av verksamheterna har kunnat påvisas inom matematikundervisning (Sowell, 1993). Dock framträder tävlingsmatematik i denna studie som en berikande verksamhet som faktiskt har resultat på utvecklingen av matematiska förmågor, något som tidigare forskning alltså inte entydigt lyckats bekräfta. Skillnaden i resultaten kan tyckas lite märklig. Intuitivt borde mer matematisk aktivitet leda till utveckling av matematiska förmågor och detta i synnerhet om det handlar om problemlösning. Krutetskii (1976) använde sig av matematiska problem för att studera den matematiska förmågans struktur hos de elever som han studerade och påpekar att just matematisk aktivitet är det som utvecklar förmågorna. Tävlingsproblemen har som tidigare nämnts mycket gemensamt med Krutetskii's problem och borde då alltså utveckla ungdomarnas förmågor. Men om det bara var själva problemen som bidrog till den upplevda utvecklingen borde även de andra verksamheterna haft samma effekt. En tolkning är att det som skiljer tävlingsmatematiska problem från de problem som presenteras av läraren under en lektion eller i en studiecirkel är kontexten. Tävlingsmatematiken erbjuder ett parallellt spår till ordinarie kurser och i den meningen framstår korrespondenskurs och träningen inför tävlingar som en form av acceleration, vilket alltså inte erbjuds inom övriga berikande verksamheter.

Studiens deltagare drivs främst av inre motivation och av autonom yttre motivation (kategorierna A-C). Att just dessa motivationsformer dominerar har tydliga kopplingar till Deci och Ryans (2000 b) självbestämmandeteori som visar att individer som drivs av de högre formerna av motivation troligare kommer att nå framgång än de som drivs av lägre former av motivation. Betydelse för vilken form av motivation som eleverna utvecklar hänger ihop med de tre viktiga psykologiska behoven autonomi, kompetens och en känsla att höra till (Deci & Ryan, 2000 a; Hannula, 2006). Av studiens resultat uttrycks betydelsen av autonomi främst av Christian när han kommenterar sin tidigare undervisning *"Ur mitt perspektiv är det viktigaste att aldrig tvinga elever att göra uppgifter i boken, ge frihet"*. Att deltagarna i studien som är några av Sveriges mest kompetenta ungdomar inom matematik i stort sett enbart har de högre formerna av motivation bekräftar alltså självbestämmandeteorin, men tillför också det matematikdidaktiska fältet ny kunskap om en grupp ungdomar som det inte finns så mycket forskning om (Leikin, 2009) och dessutom inom ett område som under senare år varit eftersatt (Hannula, 2006).

Det är också anmärkningsvärt att ingen av respondenterna enbart hade inre motivation utan alltid också andra motivationsformer. Kanske fyller de autonoma formerna av yttre motivation en viktig funktion när lusten att lära tryter och det krävs hårt slit för att utvecklingen ska ske. Tävlingsanda eller identitet som bäst i klassen hjälper, med denna tolkning, individen att orka även under krävande utvecklingsfaser.

Att endast fyra av 198 citat ger uttryck för att respondenterna drivs av några yttre motivationsformer kan indikera att individer som drivs av yttre kontrollerad motivation (kategori D och E) inte kan nå så långt som till final i Skolornas matematiktävling. En alternativ tolkning är att det speglar vår kultur och att resultatet skulle sett annorlunda ut i en kultur där föräldrar tar större ansvar för sina barns utbildning.

Även Banduras (1977) teori om tron på den egna förmågan går att knyta till studien. Deltagande elever vet, enligt egen utsago, sedan unga år att de är bättre än sina jämnåriga kamrater, vilket gör att de har fått ett ökat självförtroende. De vågar utmana sig själva, ställa upp i olika tävlingar och kritiskt ifrågasätta sina lärare. Tron på den egna förmågan är som tidigare nämnts både uppgifts- och situationsspecifik (Skaalvik & Skaalvik, 2015), vilket tydligt går att koppla till den specifika tävlingssituationen. Samtliga deltagare i studien har tidigare genomfört Skolornas matematiktävling med relativt sett bra resultat och vet med andra ord att de har goda chanser att prestera bra. De faktorer som påverkar tron på den egna förmågan (uppgiftens svårighet, tidsramar och tillåtna hjälpmedel) talar alltså till deltagarnas fördel och kan ha bidragit till att de tog sig till final i tävlingen. Flertalet av respondenterna vet att de ska söka matematiktunga utbildningar efter gymnasiet och gör det med gott självförtroende. Studiens deltagare sätter också ett högt värde på kunskaper inom matematik vilket syns i det stora antalet citat (37 av 198) som kunde knytas till nyttovärdet. Att eleverna tillmäter matematiken ett högt värde ligger helt i linje med Eccles och Wigfields förväntan-värdeteori (2000) som säger att motivationen ökar i takt med tillmätt värde och förväntningen på möjligheten att klara av uppgiften. Att också värdet en elev tillmäter ett enskilt problem har enorm betydelse för motivationen framgår av Adrians citat:

... det beror på hur mycket status jag ser i problemet. Korrespondenskursproblemen ger jag ju inte upp. Det handlar ju om 30 timmar innan jag ger upp en uppgift. Så är det ju inte med andra problem. Ser jag ett problem på internet som verkar intressant håller jag på kanske max en timme, sen kollar jag på svaret.

Här syns också kopplingen mellan motivation och tävlingsmatematik som berikande verksamhet med kontext. Skillnaden i det kontextlösa internetproblemet och korrespondenskursen problem ger en faktor 30 i nedlagd tid.

Studiens resultat kompletterar alltså de tidigare resultat som framkommit i relation till motivationsteorier och utvecklande verksamheter. Studien bidrar samtidigt till ny kunskap om gruppen matematiskt begåvade ungdomar.

Metoddiskussion

Till stora delar visade sig valet av metod för den empiriska undersökningen vara väl anpassad till syfte och forskningsfrågor. Som inspiration för metodvalet fanns tidigare erfarenheter av Blooms (1985) undersökning av 120 experter, deras föräldrar och lärare. Bloom uppfattade att intervjuer hade fungerat bra för att ta reda på experternas erfarenheter och detta var styrande i metodvalet. Att genomföra intervjuerna på elevernas skolor visade sig också vara en god strategi. Ungdomarna uppfattades bekväma i intervjusituationen och verkade inte oroliga. Detta kan också bero på att de områden som avhandlades under intervjuerna till stora delar var av positiv karaktär. De blev ju intervjuade på grund av enastående prestationer på Skolornas matematiktävling och de behövde inte besvara frågor av känslig natur.

Intervjuerna följde kronologisk ordning med startpunkt då respondenterna först förstod att de var riktigt duktiga på matematik och följde till stora delar enkätens teman. Dock fanns det ingen tydlig intervjumall med färdiga frågor eller en bestämd ordning i vilken frågorna skulle ställas. Min bedömning är att det gynnade intervjusituationen, men möjligen försvårade analysarbetet och transparensen i utförandet. Skulle en annan forskare ställt andra frågor eller fått andra resultat? Det är min uppfattning att vinsterna med intervjuer som följer respondentens berättelser och frågor som ställs i uppriktig och ärlig nyfikenhet under samtalets gång överväger de svårigheter som uppkommer i analysarbetet. Med detta sagt skulle jag ändå noggrannare planerat intervjuerna och de frågor som skulle ställas om jag gjorde om undersökningen en gång till. Det är också min uppfattning att resultatet skulle ha blivit detsamma om en annan forskare genomfört intervjuerna och analysarbetet. Resultatet från artikel 1 som gäller de verksamheter ungdomarna deltagit krävde inga svåra frågor och kom ofta spontant under intervjuerna. När det gäller resultatet från artikel 2 är det sannolikt att en annan intervjuare, med andra frågor, skulle fått andra utsagor av respondenterna, men trots detta, tror jag att resultatet skulle blivit detsamma. Det vill säga inre motivation skulle framträda som den vanligaste motivationsformen följt av de två autonom motivationsformerna som ungefär lika frekventa.

Urvalet av matematiskt begåvade ungdomar kan också problematiseras. Alla ungdomar var finalister i Skolornas matematiktävling vilket dels innebär att de deltagit i matematiktävlingar och dels att de var bäst i Sverige av de cirka tusen deltagarna. Det visade sig också i enkätundersökningen att samtliga deltagare var matematiska högpresterare och de flesta också generellt högpresterande, något som inte var givet då undersökningen påbörjades. Det betyder också att matematiskt begåvade ungdomar som inte tycker om att tävla inte hade möjlighet att delta i studien. Gällande skolprestationerna blir frågan lite mer komplex. Deltagande i tävlingen kräver inte toppbetyg i matematik, men det verkar vara så att de som kommer till final också klarar av

skolans kurser med högsta betyg. Det innebär dock inte att det krävs ämneskunskaper motsvarande högsta betyg i skolans mest avancerade kurser. Kanske är det högpresterande elever som söker sig till tävlingar, kanske uppmanar bara lärare de elever som har högsta betyg att tävla. Många elever och lärare känner säkert inte heller till tävlingen, vilket också kan vara värt att beakta⁹.

Diskussionen om studiens metodologiska aspekter är intressanta och av ytterst vikt att fundera över i relation till studiens trovärdighet. Värt att komma ihåg är dock att resultaten i mångt och mycket överensstämmer med tidigare forskning. Acceleration har tidigare visat sig utveckla individer (Sowell, 1993; Subotnik, Olszewski-Kubilius, & Worrel, 2011; Ziegler, 2010), Leikin uppmanar till tävlingsmatematik (Leikin, 2010) och de motivationsformer som framträder hos studiens deltagare som viktigast är de högsta motivationsformerna i självbestämmandeteorin (Deci & Ryan, 2000 a).

Förslag till framtida forskning

Motivation anses vara en viktig påverkansfaktor för utveckling inom flera begåvningsmodeller (Mönks & Ypenburg, 2009; Renzulli, 1978; Ziegler, 2010). Någon enhetlig definition på motivation finns dock inte, vilket bland annat visar sig genom att motivation beskrivs som både förmågan att uthålligt arbeta med en uppgift och förmågan att sätta upp långsiktiga mål (Mönks & Ypenburg, 2009). Hannula (2006) påpekar också att matematikdidaktiska studier inte lyckas beskriva motivationens detaljrikedom på ett tydligt sätt. Studien visar tillsammans med Deci och Ryans (2000 a) självbestämmandeteorin dock en möjlighet att analysera elevers motivation för matematik på ett nyanserat sätt som skulle kunna ha påverkan på undervisningen. Alla studiens deltagare var matematiskt begåvade högpresterare och motiverades av autonom och inre motivation. En spännande fråga är vilka former av motivation som de matematiskt begåvade barn som underpresterar har? En hypotes är att dessa elever visserligen har en hög grad av inre motivation, men att de saknar de autonoma formerna av motivation som högpresterande elever har. Detta skulle kunna yttra sig i att de visserligen är motiverade att ägna tid åt spännande problem, men att de inte klarar av (eller är motiverade till) att lära sig standardprocedurer eller sätta upp långsiktiga mål.

Andra intressanta område att undersöka är om acceleration och tävlingsmatematik tilltalar större elevgrupper. Intervjustudien är gjord på en väldigt

⁹ Cirka 1 000 elever deltog i tävlingen. Samtidigt gick i storleksordningen 300 000 elever i gymnasiet. Vilket innebär att endast cirka 0,3 % av alla ungdomar deltog i tävlingen, vilket kan jämföras med de 5 % som Skolverket anser vara särskilt begåvade och den 1 % som benämns extremt begåvade.

begränsad grupp elever som dessutom alla visade sig vara matematiska högpresterare och flera dessutom allmänt högpresterande. I vilken utsträckning gäller resultatet större elevgrupper? Om det gäller fler elever inställer sig genast frågan: varför just dessa aktiviteter? Beror det på, som föreslås i artikel 1, att dessa verksamheter ger möjlighet att se sammanhang som tydliggör progressionen eller finns det andra orsaker?

Möjliga implikationer för skolan

Resultatet av studien pekar på konkreta åtgärder för skolans aktörer. Flera av eleverna i studien har precis som tidigare forskning visar upplevt skolans matematikundervisning som tråkig och meningslös (Pettersson & Wistedt, 2013). Det framkommer att elevernas utveckling ofta har varit beroende av enskilda lärare på så vis att vissa lärare har uppmuntrat acceleration medan andra motverkat densamma. Många elever har också uppfattat sig som ensamma om sitt intresse i skolan. Här finns en tydlig uppgift för skolhuvudmän och rektorer att organisera undervisningen så att eleverna möter de utmaningar som de har rätt till. Alla verksamheter som presenteras i artikel 1 (Gerholm, 2016) uppskattas av studiens deltagare. Genom att ansvariga inom skolväsendet konkret går igenom verksamhet för verksamhet är det möjligt att se vad som går att åstadkomma på den egna skolan och vad som kräver ett mer utvecklat samarbete mellan olika stadier och skolor.

För både lärare och elever kan tävlingsmatematik erbjuda ett enkelt, effektivt och uppskattat komplement till skolans kurser. Fördelarna är många. Först och främst verkar tävlingsproblemen erbjuda utmaningar som uppskattas av elevgruppen, vilket borgar för att de faktiskt kommer att ägna sig åt utvecklande matematisk aktivitet. För det andra kräver det en minimal insats av läraren eftersom problemen är lättillgängliga. Merparten av tävlingsproblemen finns på internet och ger en tydlig progression. Att erbjuda eleverna detta under ordinarie lektionstid eller på speciellt avsatt tid kräver alltså små insatser som kan ha stor effekt. Eftersom tävlingarna erbjuder en parallell utveckling kan eleven samtidigt finna glädje och stimulans även i ordinarie undervisning, vilket ofta inte är fallet om eleverna ligger långt före övriga i elevgruppen.

Avslutande reflektioner

I studien knyts modeller och teorier från flera olika forskningsfält ihop. Begåvningsmodeller som pekar ut påverkansfaktorer (Ziegler, 2010), Krutetskiis (1976) beskrivning av den matematiska förmågan som ligger till grund för definition av matematisk begåvning, Leikins summering av utvecklande verksamheter (2009) och flera motivationsteorier (Bandura, 1977; Deci & Ryan, 2000 b; Dweck, 2012; Eccles & Wigfield, 2000). Det är långt ifrån självklart

att modeller och teorier inom olika forskningsområden är kompatibla med varandra. Jag uppfattar dock att dessa modeller och teorier fungerar ihop. De fokuserar olika aspekter av mänskligt beteende och ger tillsammans en fylligare bild än vad de gör var och en för sig.

Det är min förhoppning att detta arbete tillfört den samlade kunskapen nya infallsvinklar och på så vis kompletterat tidigare forskning, vilket, om så är fallet, gör att vi idag vet lite mer om matematiskt begåvade ungdomars motivation och erfarenheter av utvecklande verksamheter.

Referenser

- Alexander, P. A., & Murphy, K. P. (2000). A motivated exploration of motivation terminology. *Contemporary Educational Psychology, 25*, 3-53.
- Andersen, L., & Cross, T. L. (2014). Are students with high ability in math more motivated in math and science than other students? *Roeper Review, 36*(4), 221-234.
- Andžāns, A., & Koichu, B. (2009). Mathematical creativity and giftedness in out-of-school activities. I A. Berman, B. Koichu, & R. Leikin, *Creativity in mathematics and the education of the gifted students* (s. 285-307). Rotterdam: Sense Publishers.
- Bandura, A. (1977). Self-efficacy: Toward a unifying theory of behavioral change. *Psychological Review, 84*(2), 191-215.
- Bandura, A., & Shunk, D. H. (1981). Cultivating competence, self-efficacy, and intrinsic interest through proximal self-motivation. *Journal of Personality and Social Psychology, 41*(3), 586-598.
- Beamer, J. E., Lundberg, I., & Randhawa, B. S. (1993). Role of mathematics self-efficacy in the structural model of mathematics achievement. *Journal of Educational Psychology, 85*(1), 41-48.
- Bloom, B. S., & Sosniak, L. A. (1985). *Developing talent in young people*. New York: Ballantine Books.
- Brinkman, S., & Kvale, S. (2009). *Den kvalitativa forskningsintervjun*. Lund: Studentlitteratur AB.
- Campbell, J. R. (1996). Early identification of mathematics talent has long-term positive consequences for career contributions. *International Journal of Educational Research, 25*, 497-522.
- Dahl, T. (2011). *Problemlösning kan avslöja matematiska förmågor: Att upptäcka förmågor i en matematisk aktivitet*. (Lic.-avh.) Växjö: Linnéuniversitetet.
- Deci, E. L., & Ryan, R. M. (2000 a). The "what" and "why" of goal pursuits: Human needs and the self-determination of behavior. *Psychological Inquiry, 11*(4), 227-268.

- Deci, E. L., & Ryan, R. M. (2000 b). Intrinsic and extrinsic motivations: classic definitions and new directions. *Contemporary Educational Psychology*, 25, 54–67.
- Dicke, A.-L., Flunger, B. B., Gaspard, H., Trautwein, U., & Nagengast, B. (2015). More value through greater differentiation: gender differences in value beliefs about math. *Journal of Educational Psychology*, 107(3), 663–677.
- Dweck, C. S. (2012). *Mindset*. London: Robinson.
- Eccles, J. S., & Wigfield, A. (2000). Expectancy–value theory of achievement motivation. *Contemporary Educational Psychology* 25, 68-81.
- Esaiasson, P., Gilljam, M., Oscarsson, H., & Wängnerud, L. (2007). *Metodpraktikan - konsten att studera samhälle, individ och marknad*. Stockholm: Norstedts juridik.
- Gagné, F. (2005). From noncompetence to exceptional talent: exploring the range of academic achievement within and between grade levels. *Gifted Child Quarterly*, 49(2), 139-153.
- Gardner, H. (1983). *Frames of mind: A theory of multiple intelligences*. New York: Basic Books.
- Gerholm, V. (2016). Tävling och acceleration för utveckling av matematisk förmåga. *Forskning om undervisning och lärande*, 4(1), 25-49.
- Grønmo, S. L. (2014). Sviker skolen de flinke elevene? I L. S. Grønmo, E. Jahr, K. Skogen, & Wistedt, I.(red.) *Matematikk talenter i skolen - hva med dem*.9-32. Oslo: Cappelen Damm.
- Hagger, M. S., Sultan, S., Hardcastle, S. J., & Chatzisarantis, N. L. (2015). Perceived autonomy support and autonomous motivation toward mathematics activities in educational and out-of-school contexts is related to mathematics homework behavior and attainment. *Contemporary Educational Psychology*, 41, 111–123.
- Hannula, M. S. (2006). Motivation in mathematics: goals reflected in emotions. *Educational Studies in Mathematics*, 63, 165-178.
- Hunt, B. (1996). The effect on mathematics achievement and attitude of homogeneous and heterogenous grouping of gifted sixth-grade students. *The Journal of Secondary Gifted Education*, 8(2), 65-73.

- IMO Advisory board. (2016, 04 13). *www.imo-official.org*. Hämtad från IMO Regulations: <http://www.imo-official.org/documents.aspx>
- International Mathematical Olympiad Foundation. (2015, 10 07). *about-imo/vision*. Hämtad från <http://imof.co/about-imo/vision>.
- Juter, K., & Sriraman, B. (2011). Does high achieving in mathematics = gifted and/or creative in mathematics? I H. K. Lee, & B. Sriraman (red). *The elements of creativity and giftedness in mathematics* (s. 45-65). Rotterdam: Sense publishers.
- Kitsantas, A., Cheema, J., & Ware, H. W. (2011). The roll of homework and self-efficacy beliefs. *Journal of Advanced Academics*, 22(2), 310-339.
- Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*. Chicago & London: University of Chicago Press.
- Larsson, S. (2005). Om kvalitet i kvalitativa studier. *Nordisk Pedagogik*, 25(1), 16-35.
- Leikin, R. (2009). Bridging research and theory in mathematics education with research and theory in creativity and giftedness. I R. Leikin, A. Berman, & B. Koichu (red.), *Creativity in Mathematics and the Education of the Gifted Students* (s. 385-411). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.
- Leikin, R. (2010). Teaching the mathematically gifted. *Gifted Education International*, 27, 161-176.
- Leikin, R., Berman, A., & Koichu, B. (2009). *Creativity in mathematics and the education of the gifted student*. The Netherlands, Rotterdam: Sense Publishers.
- Mageau, G. A., Dedic, H., Rosenfield, S., Koest, R., Jungert, T., Taylor, G., & Schattke, K. (2014). A self-determination theory approach to predicting schoolachievement over time: the unique role of intrinsic motivation. *Contemporary Educational Psychology*, 39, 342-358.
- Mattson, L. (2013). *Tracking mathematical giftedness in an egalitarian context*. (Diss.) Göteborg: Göteborgs Universitet.
- Mattsson, L. (2010). Head teachers' conception of gifted students in mathematics in Swedish upper secondary school. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 15(3), 3-22.

- Mattsson, L., & Bengmark, S. (2011). On track to gifted education in mathematics in Sweden. I B. Sriraman, & L. H. Kyeong, *The elements of creativity and giftedness in mathematics* (s. 81-102). Rotterdam: Sense Publishers.
- Mattsson, L., & Pettersson, E. (2015). *Särskilt begåvade elever - 1.1 Inledning – att uppmärksamma de särskilt begåvade eleverna*. hämtad den 26 juni från <http://www.skolverket.se/polopoly_fs/1.235992!/Menu/article/attachment/1_1_begavade_barn_ACCESSIBLE.pdf>
- McCoach, B. D. (2007). Increasing student mathematics self-efficacy through teacher training. *Journal of Advanced Academics*, 18(2), 278-312.
- Mellroth, E. (2014). *High achiever! Always a high achiever? A comparison of student achievements on mathematical tests with different aims and goals*. (Lic.-avh.) Karlstads universitet.
- Mönks, F. J., & van Boxtel, H. W. (1985). Gifted adolescents: a developmental perspective. I J. Freeman (red.), *The psychology of gifted children - perspectives on development and education* (s. 275-295). John Wiley & Sons, ltd.
- Mönks, F. J., & Ypenburg, I. H. (2009). *Att se och möta begåvade barn*. Stockholm: Natur & Kultur.
- Nationellt centrum för matematikutbildning. (2015). *Vad är Kängurun - Matematikens Hopp?* Hämtad 18 juni 2015, från <[www.ncm.gu.se: http://ncm.gu.se/node/1525](http://ncm.gu.se/node/1525)>
- Nationellt centrum för matematikutbildning. (2016). *Mattetalanger*. Hämtad 27 april 2016, från <<http://mattetalanger.ncm.gu.se>>
- Pajares, F., & Kranzler, J. (1995). Role of self-efficacy and general mental ability in mathematical problem-solving: A path analysis. Presentation på *The Annual Meeting of the American Educational Research Association* (session 37.24), San Francisco, CA, 18-22 april 1995. Hämtad 26 september 2016 från <<http://files.eric.ed.gov/full-text/ED387342.pdf>>
- Pettersson, E. (2011). *Studiesituationen för elever med särskilda matematiska förmågor*. (Diss.) Växjö: Linnaeus University Press.
- Pettersson, E., & Wistedt, I. (2013). *Barns matematiska förmågor - och hur de kan utvecklas*. Lund: Studentlitteratur AB.

- Renzulli, J. S. (1978). What makes giftedness? Re-examining a definition. *Phi Delta Kappan*, 60, 180-184.
- Samuelsson, Å. H. (1988). Den första Nordiska matematikolympiaden. *Nordisk Matematisk Tidsskrift*, 36, 27.
- SFS 2010:800. (2010). *Skollag*. Stockholm: Utbildningsdepartementet.
- Skaalvik, E. M., & Skaalvik, S. (2015). *Motivation och lärande*. Stockholm: Natur & Kultur.
- Skolverket. (2010). *Betyg och studieresultat i gymnasieskolan läsåret 2008/09*: Hämtad den 18 juni 2014, från <<http://www.skolverket.se/statistik-och-utvardering/statistik-i-tabeller/gymnasieskola/betyg-och-studieresultat/betyg-och-studieresultat-i-gymnasieskolan-lasar-2008-09-1.88274>>
- Skolverket. (2012). *Högpresterande elever, höga prestationer och undervisningen. Rapport 379*. Stockholm: Skolverket.
- Skolverket. (2014). *Redovisning av uppdrag enligt förordning (2008:793) om försöksverksamhet med riksrekryterande gymnasial spetsutbildning*. Hämtad den 15 september 2016, från <<http://www.skolverket.se/publikationer?id=3285>>
- Skolverket. (2015a). *Att arbeta med särskilt begåvade elever*. Hämtad den 31 maj 2015, från <<http://www.skolverket.se/skolutveckling/larande/sarskilt-begavade-elever-1.230661>>
- Skolverket. (2015b). *Skolor med spetsutbildning*. Hämtad den 18 maj 2015, från <<http://www.skolverket.se/skolformer/grundskoleutbildning/spetsutbildning/skolor-med-spetsutbildning-1.155768>>
- Sowell, E. J. (1993). Programs for mathematically gifted students: A review of empirical research. *Gifted Child Quarterly*, 37, 124-131.
- Stålnacke, J. (2015). *Särskilt begåvade elever - 1.2 Särskilt begåvade barn i skolan*. Hämtad den 6 juni 2016, från <http://www.skolverket.se/polopoly_fs/1.235995!/Menu/article/attachment/1_2_begavade_barn_ACCESSIBLE.pdf: Skolverket.>
- Subotnik, R. F., Olszewski-Kubilius, P., & Worrel, F. C. (2011). Rethinking giftedness and gifted education: A proposed direction forward based

on psychological science. *Psychological Science in the Public Interest*, 12(1), 3–54.

Sumpter, L., & Sternevik, E. (2013). *Prospective teachers' conceptions of what characterize a gifted student in mathematics*. Hämtad 13 september 2016, från <<http://urn.kb.se/resolve?urn=urn:nbn:se:du-11941>>

Svenska matematikersamfundet. (2014). *www.mattetavlingen.se*. Hämtad den 20 juni 2014, från <<http://www.mattetavling.se/>>

Sveriges kommuner och landsting. (2014). *Handlingsplan särbegåvade elever 2014*. Hämtad 18 juni 2014, från <http://www.skl.se/vi_arbetar_med/skola_och_forskola/matematik/satsning/nyheter/handlingsplan-for-att-mota-sarbegavade-elever>

Szabo, A. (2013). *Matematiska förmågors interaktion och det matematiska minnets roll vid lösning av matematiska problem*. (Lic.-avh.) Stockholm universitet.

Søvik, N., & Valås, H. (1993). Variables affecting students' intrinsic motivation for school mathematics: two empirical studies based on Deci and Ryan's theory of motivation. *Learning and Instructions* 3, 281-298.

Terman, L. M. (1954). The discovery and encouragement of exceptional talent. *American Psychologist*, 9(6), 221-230.

Utbildningsdepartementet. (2014). *Uppdrag att främja grund- och gymnasieskolors arbete med särskilt begåvade elever. U2014/5038/S*. Hämtad den 16 september 2016, från <<http://www.regeringen.se/sokresultat/?query=U2014%2F5038%2FS>>

Wallström, C. (2010). *Se mig som jag är*. Varberg: Argument förlag.

Vetenskapsrådet. (2002). *Forskningsetiska principer - inom humanistisk-samhällsvetenskaplig forskning*. Stockholm: Vetenskapsrådet.

Vetenskapsrådet. (2011). *God forskningssed*. Stockholm: Vetenskapsrådet.

Winner, E. (1999). *Begåvade barn*. Jönköping: Brain Books AB.

Ziegler, A. (2010). *Högt begåvade barn*. Stockholm: Nordstedts.



Bilagor

Bilaga 1 – Intresseanmälan om deltagande i intervjustudie

Genom att fylla i nedanstående enkät anmäler jag intresse för att delta i en intervjustudie senare under läsåret 13-14. Intervjustudien liksom enkäten är en del av ett forskningsprojekt om matematiskt högpresterande elever som genomförs av Verner Gerholm inom ramen för en licentiandutbildning. Studien handleds av Professor Inger Wistedt och Docent Gudrun Brattström verkamma vid Stockholms Universitet. Jag som vill delta i studien kan när som helst ångra mig och välja att hoppa av undersökningen (även efter intervjun är genomförd). Mina uppgifter kommer att behandlas konfidentiellt i enlighet med vetenskapsrådets forskningsetiska riktlinjer och Personuppgiftslagen (PUL). Mitt namn kommer inte att förekomma i något sammanhang utan alla namn kommer att vara fingerade.

Underskrift Ort och datum

Bakgrundsuppgifter och kontaktinformation

Namn: Kön: Boendeort:
Ålder: Skolans namn: Program:
Årskurs: Email: Telefon:

Om du är under 16år, ange förälder/målsmans:

Namn:

Telefonnummer:

Mailadress:

Matematiktävling

1. Har du deltagit i Skolornas matematiktävling förut?

Ja Nej

2. Har du tidigare varit i final i Skolornas matematiktävling?

Ja Nej

3. Har du deltagit i någon annan matematiktävling

Ja Nej

Om ja, vilken/vilka: _____

Familj/bekantskapskrets

4. Har du några syskon?

Ja Nej

Om ja, vilken ordning i syskonskaran har du? _____

5. Har dina föräldrar akademisk utbildning?

Ja, båda två Ja, en av dem Nej, ingen av dem Vet inte

6. Har dina föräldrar (eller annan närstående) bidragit till din matematiska utveckling

Ja, mycket Ja, lite Nej, inte vad jag tror nu

7. Har det under din uppväxt funnits någon i din närhet som varit/är intresserad av matematik

Ja, nära släkting eller vän
 Ja, men inte väldigt nära
 Nej, ingen jag kommer på nu
 Annan: _____

Skola

8. Går du i en klass med matematikinriktning?

Ja Nej

9. Har du tidigare gått i en klass med matematikinriktning?

Ja Nej

10. Dina betyg i skolans/gymnasiets matematikkurser?

- Jag har högsta betyg i alla matematikkurser
- Jag har högsta betyg i de flesta matematikkurser
- Jag har högsta betyg i några matematikkurser
- Jag har aldrig nått högsta betyg i en matematikkurs
- Annat: _____

11. Betyg generellt

- Jag har höga betyg (A eller B) i alla eller nästan alla ämnen
- Jag har höga betyg i matematik, men i övrigt ganska blandade betyg
- Jag har höga betyg i matematik, men i övrigt ganska låga betyg
- Annat: _____

12. Lärarna

- Jag har många erfarenheter av riktigt bra matematiklärare
- Jag har enstaka erfarenheter av riktigt bra matematiklärare
- Jag har inga erfarenheter av riktigt bra matematiklärare

13. Om du har erfarenheter av bra lärare. På vilket sett var de bra.

14. Har du studerat matematik på egen hand utöver det som ingår i matematikkurserna

Ja, mycket Ja, ganska mycket Ja, lite Nej, inget alls

15. Uppskatta hur mycket matematik du pluggar på icke-skoltid.

- Mindre än 1 timme/vecka
- Mellan 1 och 5 timmar/vecka
- Mer än 5 timmar/vecka

Motivation

16. Kryssa för de tre alternativ som motiverar dig mest till att studera matematik

- Det är roligt
- Jag tycker om att hjälpa klasskamrater att förstå matematik
- Det ger mig status i klassen (jag får en tydlig roll)
- Jag tycker om att vara bäst
- Jag kommer att behöva kunskaperna till fortsatta studier
- Jag vill förstå hur allt hänger ihop
- Jag vill ha höga betyg för att kunna komma in på en bra utbildning
- Jag använder matematiken som ett redskap i andra ämnen (fysik, programmering m.fl.)
- Annat, nämligen:

17. Varför tror du själv att du blivit så bra i matematik?

— |

— |

|
—

I

|
—

Tävling och acceleration för utveckling av matematisk förmåga – en analys av matematiskt begåvade elevers erfarenheter av stödjande verksamheter

V Gerholm

Sammanfattning

Artikeln presenterar resultatet från en enkät och intervjustudie med 27 finalister från en nationell matematiktävling för gymnasieelever. En utgångspunkt för studien är att matematisk förmåga inte är statisk utan i hög grad förändringsbar och att utveckling sker genom matematisk aktivitet. Syftet med studien var att undersöka omfattningen av de matematiska verksamheter som eleverna deltagit i under sin skolgång och vilken betydelse eleverna tillmäter dem. Generellt uttalar sig eleverna positivt om de verksamheter de deltagit i. Detta gäller i synnerhet acceleration i ämnet samt tävlingsmatematik som anses särskilt betydelsefulla. Studien indikerar att verksamheter som erbjuder ett ramverk att förhålla sig till och där progressionen synliggörs, i högre utsträckning uppskattas av eleverna. Sådana verksamheter kan till exempel innebära att eleverna ges möjlighet accelerera i ämnet eller att de erbjuds att arbeta med tävlingsproblem.

Nyckelord: accelererande undervisning, berikande undervisning, matematiskt begåvade elever, matematikundervisning, tävlingsmatematik



Verner Gerholm är licentiand i forskarskolan för ämnesdidaktik vid Stockholms universitet. Studierna bedrivs på Institutionen för matematikämnets och naturvetenskapsämnenas didaktik, MND. Parallellt med studierna arbetar han på Nacka gymnasium och undervisar i samhällskunskap och matematik.

Abstract

The article presents the results from a questionnaire and interview study of a total of 27 finalists in a national mathematical competition for students in Swedish upper secondary schools. A presumption for the study is that mathematical ability is highly mutable and that mathematical activity is necessary to enable development. The aim of the study was to investigate to what extent the students had participated in various mathematical activities during their years in school and what impact the students attach to these activities. Generally the students were positive about the activities they had participated in. Specifically acceleration in the subject and mathematical competitions stand out as particularly significant activities according to the students. The study shows the significance of mathematical activities providing a framework to relate to, which will make the progression more visible for the students. Such activities could be mathematical competition problem solving or acceleration in the subject.

Keywords: acceleration in mathematics, enriching teaching, gifted education, mathematical activities, mathematic competition, mathematics education, mathematically gifted students

Introduktion

Intresset för undervisning av matematiskt begåvade elever har ökat markant de senaste åren i Sverige. Det märks bland annat på ökad forskning på området (Dahl, 2011; Mattson, 2013; Pettersson, 2011; Szabo, 2013) samt införande av spetsutbildningar på gymnasiet 2009 (Skolverket, 2014) och högstadiet 2012¹ (Skolverket, 2015b). Regeringens beslut 2014 att ge Skolverket i uppdrag att "stimulera och stödja grund- och gymnasieskolors arbete med särskilt begåvade elever" (Utbildningsdepartementet, 2014), vilket resulterade i skolverkets stödmaterial "Att arbeta med särskilt begåvade elever" (Skolverket, 2015a), är också tecken på ökad medvetenhet om situationen för begåvade barn och ungdomar. 2014 publicerade också Sveriges kommuner och landsting ett förslag till handlingsplan för att möta särbegåvade elever i skolan (Sveriges kommuner och landsting, 2014).

Det finns två huvudargument för att ett utbildningssystem ska organiseras för att möta de mest begåvade eleverna (Nevo & Rachmel, 2009). Först och främst individskälet: begåvade elever har lika stor rätt till personlig utveckling som andra elever. Det går långt ifrån alltid bra för begåvade elever och elever med fallenhet för skolämnet presterar ofta inte efter sin förmåga (Mönks & Ypenburg, 2009). Än värre är att eleverna, i de fall då skolan inte kan möta dem på deras nivå, löper en betydande risk att uppleva skolan som tråkig och ointressant eftersom de redan behärskar det som de förväntas att lära in (Mönks & Ypenburg, 2009). Matematiskt begåvade elever är i sammanhanget inget undantag (Pettersson & Wistedt, 2013). De kan känna sig frustrerade och det är inte ovanligt att de hamnar i konflikt med lärarna (Winner, 1999). Vidare kan de bli omotiverade, lata och bråkiga (Ziegler, 2010) eller dölja sina förmågor för att bättre passa in i den rådande klassrumsnormen (Pettersson & Wistedt,

¹ Det finns idag (2015) 20 spetsutbildningar på gymnasiet varav fyra har inriktning matematik och tio högstadieskolor med matematisk spetsutbildning.

Gerholm

2013). Det andra argumentet, som intelligensforskaren L.H. Terman anförde redan för snart 90 år sedan, handlar mer om samhället och går i korthet ut på att ett samhälles resurser av intellektuell begåvning har stor betydelse för den mänskliga välfärden och måste tas tillvara för allas bästa (Nevo & Rachmel, 2009).

I den svenska skolan har det första argumentet på senare år vunnit gehör. I den nu rådande skollagen fastslås att alla barn och ungdomar har rätt att utvecklas efter sina förmågor:

Elever som lätt når de kunskapskrav som minst ska uppnås ska ges ledning och stimulans för att kunna nå längre i sin kunskapsutveckling.

(SFS 2010:800)

Det råder alltså inte längre något som helst tvivel om vad som är skolans uppdrag gällande begåvade elever. Hur man organiserar en skola så att också dessa elever får utmaningar är en uppgift för skolhuvudman, rektor och lärare.

Även om intresset har ökat är forskning om undervisning av matematiskt begåvade barn och ungdomar fortfarande ett eftersatt område (Leikin, 2009). Forskningsfältet kunde ha överlappats av både begåvningsforskare och matematikdidaktiker, men har i stället hamnat i tomrummet mellan de olika fälten (Leikin, 2009). Sedan Krutetskii's longitudinella studie med över 200 elever (Krutetskii, 1976) har ingen större empirisk studie genomförts på området (Leikin, 2009). Det förekommer en mängd olika program och verksamheter som syftar till att stärka matematiskt begåvade elevers kunskaper, men det saknas systematiserad och rapporterad kunskap om vilka effekter och konsekvenser dessa verksamheter egentligen har för individen. För att förstå effekterna av olika former av utbildningsinsatser krävs empiriska utvärderingar av de verksamheter som förekommer (Leikin, 2009).

I linje med Leikins uppmaning syftar denna artikel till att undersöka några matematiska verksamheter som antas stödja matematiskt begåvade elever. Mer precist ska artikeln besvara följande två forskningsfrågor:

1. Hur uttalar sig matematiskt begåvade elever om de matematiska verksamheter de deltagit i under skolåren?
2. Vilka skillnader går att skönja i elevernas utsagor gällande omfattning och betydelse av deltagande i de olika verksamheterna?

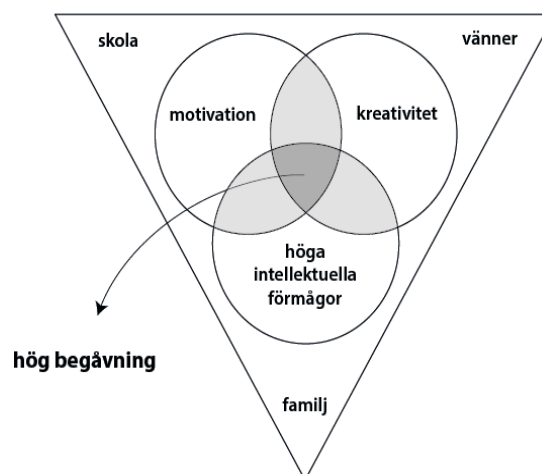
För att besvara frågeställningarna har enkäter och intervjuer genomförts med matematiskt begåvade elever i gymnasieskolan. Innan studien presenteras mer utförligt, beskrivs i följande avsnitt tidigare forskning inom området samt de teorier, modeller och definitioner som ligger till grund för studien och dess urvalskriterier.

Begåvningsmodeller

Under det senaste 100 åren har synen på begåvning och prestationsförmåga förändrats radikalt. De tidiga begåvningsforskarna hade en stark tro på intelligensen (mätt i

IQ) som förklaring till begåvning och höga prestationer, men den statistiska monokausala intelligensteorin lyckades inte på ett tillfredställande sätt förklara excellent prestationsförmåga (Ziegler, 2010). Begåvningsforskarna upptäckte att prestationer på IQ-test inte ensamt förklarar variation i begåvning inom olika domäner. Det vill säga resultaten på intelligenstester kunde inte förutsäga exceptionell prestationsförmåga inom någon domän och därigenom anpassades begåvningsmodellerna. Inom modern begåvningsforskning är man idag också tämligen överens om att begåvning inte är något statistiskt utan i hög grad utvecklingsbart (Ziegler, 2010).

En av de mest kända multikausala modellerna är Renzullis (1978) triadiska begåvningsmodell. Modellen tar hänsyn till tre, av varandra oberoende och lika viktiga, faktorer hos individen, nämligen höga intellektuella förmågor, motivation och kreativitet. En brist hos både den tidiga intelligensteorin och Renzullis modell är att de helt förbiser vikten av individens omvärld (Ziegler, 2010). Utveckling sker inte i ett socialt vakuum utan i samspel med andra människor. Med beaktande av den sociala miljöns betydelse och psykologiska utvecklingsteorier samt Renzullis teori som grund skapade Mönks sin triadiska interdependensmodell (Mönks & van Boxtel, 1985). Modellen, som alltså är teoretiskt grundad, tar hänsyn till två triader av faktorer som sinsemellan är ömsesidigt beroende av varandra (interdependenta). Den första triaden består av de kognitiva faktorer som Renzulli betonade: höga intellektuella förmågor, motivation och kreativitet (se bild 1). Den andra triaden utgörs av de viktigaste sociala områdena för en ung individ: hemmet, skola och vänner (peers). Det är när dessa sex faktorer samspelar väl som begåvning kan utvecklas och höga prestationer kan förverkligas (Mönks & van Boxtel, 1985).



Figur 1. Mönks triadiska interdependensmodell (ur Mönks & Ypenburg, 2009). Bilden illustrerar hur en individs begåvningsutveckling påverkas av både kognitiva och sociala faktorer. Dessa är i sin tur ömsesidigt beroende av varandra, interdependenta. Modellen visar de två triaderna, de kognitiva förmågorna är illustrerade med cirklar, och de viktiga sociala faktorerna är illustrerade i den omgivande triangeln.

Gerholm

Med höga intellektuella förmågor avses vanligtvis att intelligensen ligger klart över genomsnittet, vilket ofta mäts med ett intelligenstest (Mönks & Ypenburg, 2009). Med motivation (på engelska "task commitment"), avser Mönks i sin modell förmågan att fullfölja påbörjade uppgifter, lusten att lösa uppgifter samt också förmågan att sätta upp långsiktiga mål och planer (Mönks & van Boxtel, 1985). Kreativitet innebär i modellen bland annat förmåga att lösa problem på ett originellt sätt, men också att finna spännande problem i sin omgivning samt självständigt och produktivt tänkande. (Mönks & Ypenburg, 2009)

Mönks betonar vikten av de närmaste sociala relationerna för en individs utveckling:

"... ett gott socialt utbyte med framför allt familj, skola och vänner [...] är oundgängligt för en sund utveckling."

(Mönks & Ypenburg, 2009, s. 27)

Mönks anser också att man i stället för vänner egentligen bör tala om "peers" eftersom en "peer" är en person som befinner sig på samma utvecklingsnivå. Viktigt att notera är att Mönks begåvningsmodell är av generell karaktär och kan sägas gälla begåvning inom flera olika domäner varav matematik är en. De sociala faktorerna är också mycket omfattande, delvis överlappande och täcker stora delar av en ungdoms sociala miljö.

Mönks flerfaktormodell låg till grund för intervjuguiden som användes vid studiens datainsamling. Innehållet i denna artikel begränsas i enlighet med syftet till verksamheter inom den sociala faktorn "skola". Fokus ligger dock inte på ordinarie undervisning utan på särskilda verksamheter utformade för att stödja och stimulera matematiskt begåvade ungdomar.

Matematiska förmågor och matematiskt begåvade ungdomar

Ett ramverk som beskriver vad som kännetecknar matematiskt begåvade elever är det som utvecklades av den ryske psykologen och forskaren V.A. Krutetskii (1976). Modellen är resultatet från en longitudinell studie som han ledde mellan åren 1955 och 1966. Trots att forskningsresultaten är snart 50 år gamla är de fortfarande aktuella och resultaten från studien används med framgång av flera forskare på området (Dahl, 2011; Leikin, 2010; Pettersson, 2011; Subotnik, Pillmeier, & Jarvin, 2009; Szabo, 2013). Krutetskii:s studie är en kartläggning av den matematiska förmågans struktur vid matematisk problemlösning. I studien identifierades flera matematiska förmågor som samverkar med varandra. De förmågor som identifierades i studien var:

- A. Förmågan att insamla och formalisera matematisk information
 - till exempel förmågan att upptäcka den formella strukturen i ett matematiskt problem.
- B. Förmågan att bearbeta matematisk information
 - till exempel förmågan att tänka logiskt inom områden som representeras av

- kvantitativa och spatiala samband samt numeriska och algebraiska symboler,
- förmågan att tänka och uttrycka sig med hjälp av matematiska symboler,
- förmågan att effektivt kunna generalisera samband, räknemetoder och egenskaper hos matematiska objekt,
- förmågan att förkorta matematiska resonemang och tillhörande beräkningar,
- flexibilitet i tänkandet samt en strävan efter klarhet, enkelhet, elegans och rationalitet i lösningar.

C. Förmågan att minnas matematisk information

- så kallat matematiskt minne, det vill säga ett generaliserat minne för matematiska samband, typiska egenskaper, problemlösningsmetoder samt mentala strukturer för argumentation och bevisföring.

D. Ovanstående förmågor resulterar i en allmän och sammansatt förmåga, som manifesteras i ett matematiskt sinnelag.

(Krutetskii, 1976, ss. 350-351) i översättning av (Szabo, 2013, ss. 27-28)

Det visade sig i Krutetskii's studie att de duktigaste eleverna hade väldigt olika profil gällande de matematiska förmågorna så till vida att ett problem som en elev löste visuellt kunde en annan lösa genom logiskt resonemang. Krutetskii är också noggrann med att poängtera att förmågorna ingalunda är statiska utan att de utvecklas i och genom matematisk aktivitet (Krutetskii, 1976). Möjligheten att utvecklas överensstämmer, som tidigare nämnts, med rådande begåvningsforskning (Ziegler, 2010). Enligt denna förklaring föds man alltså inte begåvad, utan snarare med ett anlag att utveckla begåvning. Ingen blir heller begåvad utan att delta i matematiska aktiviteter.

Med matematiskt begåvade elever förstås i denna artikel elever som i hög utsträckning använder ovanstående förmågor i matematisk problemlösning. Värt att poängtera är dock att en elev inte behöver använda sig av samtliga förmågor vid problemlösning för att betraktas som matematiskt begåvad (Krutetskii, 1976). Genom att observera elever när de ägnar sig åt matematik kan man identifiera de förmågor som kommer till uttryck i den matematiska aktiviteten och därigenom kan elevernas matematiska begåvning verifieras (Pettersson & Wistedt, 2013). Förhållande mellan Mönks teoretiskt grundade modell och Krutetskii's empiriska beskrivning av den matematiska förmågans natur är att den senare preciserar hur matematisk förmåga kommer till uttryck. Den bakomliggande idén är alltså att när de sex faktorer som Mönks nämner samspelar har individen möjlighet att utveckla matematisk förmåga såsom Krutetskii beskriver det.

Att utveckla förmågor

För att utveckla förmågor inom en specifik domän krävs att individen medvetet övar sig i syfte att förbättra prestationsförmågan, vilket brukar benämnas "deliberate practice". Träningen måste också anpassas efter individen och ligga precis ett steg över hennes nuvarande förmåga (Ziegler, 2010).

Denna träning får merparten av alla barn genom att följa ordinarie undervisning. För att också begåvade barn och ungdomar ska få träning inom sin begåvningsdomän

kan stödinsatser utöver ordinarie undervisning behöva sättas in (Mönks & Ypenburg, 2009). I litteraturen är det främst två olika insatser som brukar nämnas när det gäller skolans stöd till särbegåvade elever - accelerering och berikning. Accelerering innebär att eleven får arbeta sig igenom lärostoffet i snabbare takt än sina klasskamrater och/eller flytta fram en eller flera årskurser. Berikning innebär att eleven får ta del av ett utvidgat eller fördjupat lärostoff (Mönks & Ypenburg, 2009). Hur accelerationen och berikningen i praktiken organiseras varierar stort.

Det finns vetenskapligt stöd för att olika former av accelerering har en positiv effekt på matematiskt begåvade ungdomar (Sowell, 1993). Det finns också ett visst stöd för att matematiskt begåvade ungdomar gynnas av homogena grupper, men denna effekt av nivågruppering verkar inte gynna elever med mer normal begåvning (Hunt, 1996).

Ziegler (2010) bekräftar effekterna av accelerering och prestationsgruppering och menar att det generellt för begåvade barn också finns positiva effekter av berikning. I Sowell (1993) sammanställning över stödåtgärder för matematiskt begåvade ungdomar syns dock inga tydliga positiva effekter av berikning.

I antologin "Creativity in Mathematics and the Education of Gifted Student" sammanfattar Leikin (2009) nio verksamheter som matematiskt begåvade elever bör erbjudas för att få möjlighet att utvecklas optimalt. Med verksamhet menas här en organisatorisk indelning av sammanhang där man ägnar sig åt olika matematiska aktiviteter som till exempel problemlösning och bevisföring. Dessa aktiviteter kan vara berikande, accelererande eller både och. Leikins lista med verksamheter ligger till grund för studiens analys och presenteras utförligare längre fram i artikeln.

Tävling som verksamhet för att utveckla och öka intresse för matematik

Det finns flera olika former av matematiktävlingar. Man kan tävla individuellt eller i lag, lösningarna på problemen kan ges med flervalsalternativ eller beräkningar på papper, bedömningen av svaren kan ske av eleven själv i klassrummet eller av en extern bedömningskommitté som tar hänsyn till en mängd faktorer. Varianterna är många och kanske är ordet tävlingsmatematik egentligen ganska missledande. Syftet från organisatorernas sida handlar sällan om att kora den bästa matematiska ungdomen. Snarare handlar det om att öka matematikintresset, utveckla problemlösningss-förmåga och erbjuda möten mellan matematikintresserade ungdomar. Kängurutävlingens syfte "att stimulera intresset för matematik genom bra problem som är tänkta att väcka nyfikenhet och lust att lära matematik" (Nationellt centrum för matematikutbildning, 2015) är ett exempel på detta och den internationella matematikolympiaden, som syftar till att förena matematikintresserade ungdomar världen över och låta dem uppleva utmanande matematik i en anda av vänskaplig konkurrens är ett annat (International Mathematical Olympiad Foundation, 2015).

Problemlösning är helt centralt inom tävlingsmatematik och tävlingsproblemen som förekommer i olympiaden (International Mathematical Olympiad Foundation, 2015) har mycket gemensamt med de problem som Krutetskii (1976) använde i sin studie. Problemen är inte av standardkaraktär och kräver inte heller kunskaper utöver elevens förväntade utbildningsnivå. Det går alltså utmärkt att ägna sig åt "tävlings-

matematik” utan att för den skull vara intresserad av själva tävlandet.

I denna studie används Skolornas matematiktävling som hjälp för att identifiera matematiskt begåvade ungdomar. Tävlingen anordnas av Svenska matematikersamfundet och riktar sig till landets gymnasieelever (elever i årskurs nio kan beviljas dispens). Deltagarna, cirka 1000 elever per år, skriver först en kvaltävling på sin skola. Därefter skickas lösningarna till tävlingskommittén som bedömer elevernas lösningar. De 20 till 30 bästa eleverna erbjuds att skriva en finaltävling som genomförs på någon av landets universitet eller högskolor. Efter finalen erbjuds samtliga finalister att delta i en distanskurs, den så kallade korrespondenskursen, vilken leds av matematiker från matematikersamfundet. Efter avslutad korrespondenskurs väljs de sex bästa ungdomarna ut att representera Sverige i den internationella matematikolympiaden, IMO (Svenska matematikersamfundet, 2014).

Skolornas matematiktävling utgör ett exempel på matematisk verksamhet och jag har i studien utgått från att de ungdomar som tagit sig till final samtliga är att betrakta som matematiskt begåvade enligt definitionen ovan. Jag har däremot inte själv verifierat deras matematiska förmågor. Värt att poängtera är att matematiskt begåvade elever som inte tävlar per definition inte omfattas i studien.

Material och metod

Enkät och intervjustudie

I denna artikel presenteras ett delresultat från en större studie med syftet att undersöka matematiskt begåvade ungdomar med avseende på Mönks (1985) flerfaktormodell. Benjamin Blooms (1985) expertstudie på 120 världsledande individer inom matematik, neurologi, tennis, simning, piano och skulptur stod som inspirationskälla till studien, men det bedömdes på ett tidigt stadium som alltför resurskrävande att samla in data från flera personer än ungdomarna själva, något Bloom gjorde i sin studie. Detta ledde till forskningsfrågor som tar sin utgångspunkt i individens uppfattning om världen, vilket i sin tur motiverar metodvalet. Tidigare forskning pekade inte tydligt ut svarsalternativ inom de områden som skulle undersökas, men modellens faktorer är relativt väl avgränsade (skola, vänner, familj, motivation). Kvale och Brinkman är tydliga med att intervju i allra högsta grad lämpar sig vid dessa typer av forskningsfrågor: "[D]en kvalitativa forskningsintervjun söker förstå världen från undersökningspersonens synvinkel, utveckla mening ur deras erfarenheter ..." (Brinkman & Kvale, 2009, s. 17). Även Blooms erfarenheter efter fyra års forskning på utvecklandet av förmågor i världsklass styrker intervjun som datainsamlingsmetod: "[...] we acquired greater and greater confidence in the value of the retrospective-interview approach to the study of talent development." (Bloom, 1985, s. 16). Dessa övervägande låg till grund för att välja intervju som huvudmetod i studien.

Med ovanstående resonemang om metodval samt med min definition av matematiskt begåvade elever som utgångspunkt presenteras nedan urvalsprocess och datainsamlingsmetod. Den empiriska delen av studien inleddes med en pilotstudie i syfte att få underlag till enkätstudie och intervjumall. Utifrån pilotstudiens resultat

och Mönks flerfaktormodell konstruerades därefter enkät- och intervjumall. Hösten 2013 skrev 975 elever kvältävling i Skolornas matematiktävling och av dessa gick 29 vidare till final. De 29 finalisterna fick efter finaltävlingen fylla i en enkät som utöver grunddata innehöll frågor om elevernas familjesituation, skolgång, betyg och vad som motiverade dem att lära sig matematik. 27 finalister valde att fylla i enkäten och två avstod.

Utifrån enkätsvaren valdes 16 finalister ut till intervjustudien. Respondenterna till intervjustudien valdes för att uppnå bredd bland de intervjuade i syfte att få en så nyanserad och rik bild som möjligt. Respondenterna valdes alltså utifrån de skillnader i pedagogisk miljö som framkom i enkätsvaren, till exempel om de hade föräldrar med eller utan akademisk utbildning, om de gick på ett spetsgymnasium i matematik eller i en vanlig klass. 16 finalister valdes med avseende på de skillnader som fanns i gruppen, antalet var inte bestämt på förhand. Urvalet till intervjustudien kan alltså inte anses vara representativt, snarare är det ett strategiskt urval utifrån principen maximal variation, vilket är en användbar metod för urval vid undersökningar som handlar om individers olika uppfattningar (Esaiasson, Gilljam, Oscarsson, & Wängnerud, 2007). Slutsatserna av undersökningens resultat kan med detta urval antas omfatta fler olika uppfattningar av verksamheterna än om respondenterna i alla avseenden hade liknat varandra avseende på kön, betyg, matematikclass med mera.

Tematiskt strukturerade intervjuer

15 av de 16 utvalda ungdomarna intervjuades under tidsperioden januari till april 2014 (en elev avböjde på grund av tidsbrist). Intervjuerna genomfördes på finalisternas respektive skolor och varade mellan 30 och 75 minuter. Intervjuerna bandades och transkriberades utom i ett fall där anteckningar togs då respondenten inte ville bli inspelad. Deltagare och skolor i studien har i artikeln fått fingerade namn med hänsyn till elevernas integritet.

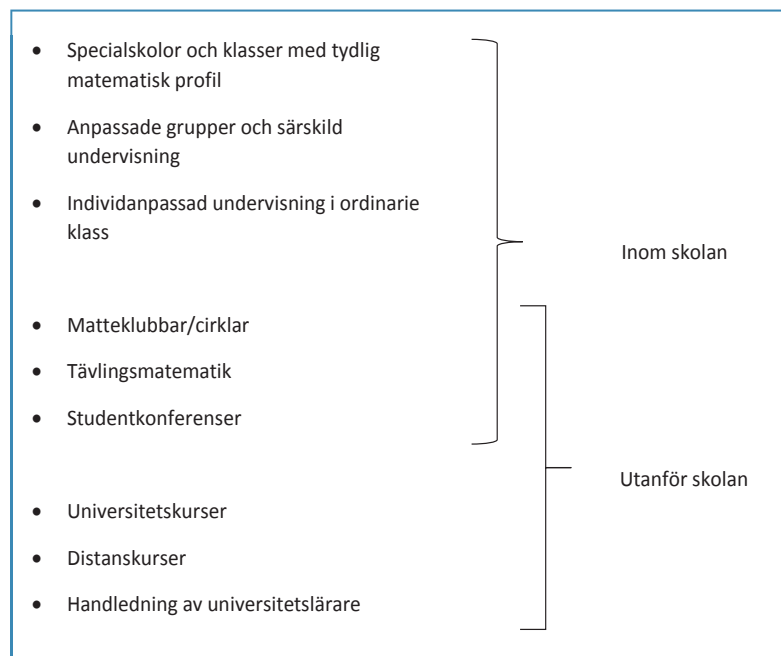
Intervjuerna var tematiskt strukturerade. Efter inledande frågor om känslan av att gå till final och vad de mindes av matematiktävlingen ställdes frågor utifrån fyra av sex faktorer från Mönks (1985) interdependensmodell (se bild 1). De fyra faktorerna som ingick i intervjuerna var familj, vänner, skola och motivation². Frågorna berörde bland annat: inställning till matematik i familj och vänskapskrets, vad som motiverade eleverna till att studera matematik, hur skolgången hade sett ut och vilka matematiska verksamheter eleven hade deltagit i. Stor hänsyn togs till de individuella skillnaderna hos elevernas personlighet, vilket innebar att intervjuerna trots att de behandlade samma faktorer skilde sig både i tid och omfattning. Frågeformulering och ordningen frågorna ställdes i skilde sig alltså åt mellan intervjuerna, men temana var desamma. I denna artikel behandlas bara den del av studien som berör matematiska verksamheter.

² Kreativitet och höga intellektuella förmågor utelämnades från intervjun. Detta eftersom faktorerna dels är svåra att undersöka i en intervjusituation och dels är svåra för individen att ha en adekvat uppfattning om

Analys

Med verksamhet avses i denna artikel en organisatorisk indelning av sammanhang där man ägnar sig åt olika matematiska aktiviteter, som till exempel problemlösning och bevisföring. I detta arbete analyseras endast verksamheter utöver ordinarie skolundervisning.

För att analysera intervjuerna användes Leikins (2009) kategorisering av matematiska verksamheter. Verksamheterna har dock modifierats under analysens gång för att bättre passa svenska förhållanden och för att bättre svara mot det svenska skolsystemet och studiens datamaterial. Verksamheterna som beskrivs nedan ordnas efter huruvida de bedrivs inom skolan, utanför skolan, eller både inom och utanför skolan (se figur 2).



Figur 2: Verksamheter som stödjer utvecklingen av elevers matematiska förmåga. En bearbetning av Lenkins kategorisering av matematiska verksamheter (2009).

Verksamheter inom skolan

Specialskolor och klasser med tydlig matematisk profil

Denna verksamhetskategori innefattar alla former av skolundervisning där en klass eller skola har en tydlig inriktning mot matematik. De tydligaste exemplen är de riksrekryterande spetsklasserna på högstadiet och gymnasiet som har inriktning matematik, men även mer lokalt anpassade skolor och profilklasser faller inom ramen för

Gerholm

denna verksamhet. Naturvetenskapsprogrammet på gymnasiet är det program som innehåller flest obligatoriska matematikkurser och kan därför också ses som en profilering mot matematik, om än inte lika tydlig som spetsgymnasierna.

Anpassade grupper och särskild undervisning

Särskilt utformade skolverksamheter, som kan rymma olika typer av undervisningsformer, räknas hit. Gemensamt för dem är att elever lyfts från ordinarie matematikundervisning för att få extra träning tillsammans med andra elever. All undervisning sker under överinseende av en matematiklärare eller matematiker. Innehållet fokuserar skolkurser, men kan vara både accelererande (grundskoleelever som läser in gymnasiekurser) eller i form av nivågruppering (de bästa på en skola får läsa kursen tillsammans).

Individanpassad undervisning i ordinarie klass

Denna verksamhet innebär att den matematiskt begåvade eleven deltar i ordinarie undervisning, men arbetar i egen (snabbare) takt eller med andra uppgifter än övriga i klassen (till exempel problem från tävlingsmatematik). Här återfinns alltså hela spännvidden från elever som tillsammans med sin lärare tagit fram en tydligt utpekad plan till elever vars lärare låter dem göra vad de vill, eftersom de redan kan kursinnehållet.

Verksamheter inom eller utanför skolan

Matematikklubbar och studiecirklar

Detta är en bred kategori som innefattar olika verksamheter som riktar sig till matematiskt intresserade individer. Klubbarna kan existera och organiseras på eller utanför skolan dag och kvällstid. Innehållet har ingen tydlig koppling till läroplanernas kurser. Strukturen kan variera från löst sammansatta grupper till mer styrda studiecirklar med en tydligt utpekad ledare. Syftet med klubben/cirkeln behöver inte ha en tydlig progression eller i förväg utpekad innehåll.

Tävlingsmatematik

Kategorin innebär deltagande i olika matematiktävlingar, individuellt eller i grupp. Det finns en mängd olika matematiktävlingar att välja bland: lokala skolmästerskap, Kängurutävlingen³, regionala grupp/klasstävlingar, nordiska mästerskap, olympiader m.m. Även rena tävlingsmatematiska träningsläger förekommer.

Studentkonferenser

Studentkonferenser är arrangerade matematikträffar för ungdomar som syftar till att stimulera matematisk nyfikenhet och föra samman elever med intresse för matema-

³ Kangourou sans Frontières är en internationell rörelse som varje år genomför en tävling som riktar sig till elever på alla nivåer. Det är alltså inte en elitävling. (Nationellt centrum för matematikutbildning, 2015)

tik. I Sverige finns bland annat Sonja Kovalevsky dagarna och interna konferenser hos vissa skolhuvudmän.

Verksamheter utanför skolan

Universitetskurser

Elever i grundskolan och gymnasiet kan läsa kurser på universitet eller högskola. Formellt kan elever inte antas till högskolan innan de har en gymnasieexamen, men detta löses vanligen genom lokala överenskommelser. Eleverna kan därför inte få högskolepoäng dokumenterade innan de har gymnasieexamen.

Distanskurser

Till denna kategori räknas kurser med undervisning på distans, som inte är universitets- eller högskolekurser. Idag bedrivs oftast distanskurser i form av webkurser med inslag av både föreläsningar, seminarier och chattar, vilket gjort att kursformen närmast sig den traditionella undervisningen. Sommarkurser i problemlösning och Matematikersamfundets korrespondenskurs är två exempel på distanskurser.

Handledning av universitetslärare

Denna verksamhetskategori innebär att en elev regelbundet träffar en universitetslärare och får handledning av denne. Många elever träffar disputerade matematiker på sin gymnasieskola, men då syftet inte är handledning av en enskild elev utan undervisning av en grupp, exkluderas dessa fall här. Däremot faller handledning av gymnasiearbete och privatundervisning i hemmet inom ramen för verksamheten.

Resultat

Bakgrundsdata från enkätstudien

27 finalister besvarade enkäten och av dem var 21 män och sex kvinnor (se tabell 1). 13 gick i årskurs två och 14 i årskurs tre på gymnasiet. 25 elever läste naturvetenskapsprogrammet och av dessa läste 18 ett program med matematikprofil övriga sju läste annan profilinriktning eller vanligt naturvetenskapligt program. Två elever läste på International Baccalaureate, IB.

Av de 27 eleverna som deltog i enkätundersökningen hade 25 föräldrar med akademisk utbildning. 23 finalister uppger att de haft något eller stort stöd av sina föräldrar eller annan närstående för sin matematiska utveckling. Fyra anser sig inte ha fått något stöd alls för sin matematiska utveckling, varken av sina föräldrar eller av någon annan nära anhörig.

Generellt sett kan eleverna anses vara högpresterande då samtliga har högsta betyg i matematik och 24 av 27 uppger att de har A eller B i alla eller nästan alla ämnen.

		Enkätstudie (n=27)	Intervjustudie (n=15)
Kön	Män	21	10
	Kvinnor	6	5
Årskurs	Årskurs 2 gymnasiet	13	7
	Årskurs 3 gymnasiet	14	8
Program	Naturvetenskapsprogrammet (ordinarie eller annan inriktning än matematik)	7	6
	Naturvetenskapsprogrammet med matematikinriktning	18	7
	IB - International Baccalaureate	2	2
Utbildningsnivå föräldrar	Två föräldrar med akademisk utbildning	21	11
	En förälder med akademisk utbildning	4	2
	Ingen förälder med akademisk utbildning	2	2
Anhörigas betydelse för matematisk utveckling	Föräldrarna eller annan närstående mycket viktiga för matematisk utveckling	11	8
	Annan närstående lite viktig för matematisk utveckling	12	5
	Ingen närstående viktig för matematisk utveckling	4	2
Betyg matematik	Högsta betyg i alla matematikkurser	27	15
Betyg andra ämnen	A eller B i alla eller nästan alla ämnen	24	13
	A i matematik, men i övrigt blandade betyg	3	2

Tabell 1. Sammanställning av bakgrundsdata över deltagarna i studien. Av de 975 deltagarna i Skolornas matematiktävling 2013 gick 29 elever till final, 27 av dessa finalister deltog i enkätstudien, 15 av dem deltog även i intervjustudien.

Elevers utsagor om matematiska verksamheter

Nedan presenteras resultatet utifrån de nio verksamheter som användes vid analysen av datamaterialet. Resultatet kommer huvudsakligen från intervjuerna, men har kompletterats med enkätsvaren för att ge en bättre helhetsbild. Verksamheterna är grupperade enligt studiens kategorisering, det vill säga utifrån om de genomförs inom skolan, inom eller utanför skolan eller endast utanför skolan.

Verksamheter inom skolan

Specialskolor och klasser med tydlig matematisk profil.

I enkätundersökningen framkommer att de flesta eleverna gått i vanliga grundskolor. Sju av 27 uppger dock att deras grundskola haft någon form av naturvetenskaplig/matematisk inriktning. Av de 15 som intervjuades kan fyra sägas gått specialklass i grundskolan (Jonas, Tomas, Elsa och Sarah). Jonas och Tomas gick i ett vanligt hög-

stadium men i en klass med naturvetenskaplig profil. Elsa gick grundskolan utanför Sverige i en utbildning som fokuserade på att lyfta fram de bästa eleverna. Elsa berättar:

"Det finns en examen i slutet av grundskolan och en annan i slutet av gymnasiet så alla fokuserar på att få bra betyg i examen så min skola gjorde så att de femtio bästa i varje årskurs fick extraundervisning [Elsa rankades alltid topp 1 av 270]. Då hade vi lektion på lördag och söndag också, men det var inte bara matte."

Elsas skola var ingen uttalad matematisk specialskola, men i jämförelse med svenska skolor kan den anses vara en specialskola.

Sarah berättar i sin intervju att hon började i Kunskapsskolan i årskurs sex. Hon fick där möjlighet att helt och hållet utvecklas i sin egen takt, vilket hon uppskattade mycket.

"För mig passade Kunskapsskolan. De har ett helt annat arbetssätt. Man jobbade i egen takt och fick hjälp av lärarna om man behövde och så bestämde man sitt eget schema själv. Det passade mig utmärkt."

Kunskapsskolan är inte en skola med särskild matematisk inriktning, men det pedagogiska upplägget innebär stora möjligheter till individuella anpassningar.

På gymnasiet är det betydligt fler som valt ett program med matematisk inriktning. 25 av 27 uppger i enkäten att de går på naturvetenskapsprogrammet och av dem läser 18 på matematiskt spetsgymnasium eller i en klass med matematikprofil. De två som inte läser naturvetenskapligt program läser på IB. Samtliga intervjuade uppger att de trivs på sitt gymnasieprogram. Kunniga lärare, klasskamrater med samma intresse och fler utmaningar totalt sett (även om matematiken ofta fortfarande uppfattas som lätt) är skäl som anförs för att gymnasiet är bättre än grundskolan. Tomas som går på ett spetsgymnasium berättar att han är nöjd med både elever och lärare:

"Det viktigaste är eleverna tycker jag. Vi möts mellan årskurserna i elevföreningar och umgås mycket. Och det är väldigt duktiga klasser och man får vara en del av en ambitiös studiemiljö. Våra mattelärare är jätteduktiga.[...] så jag är nöjd och ångrar inte mitt val på något sätt."

Adrian som läser på naturvetenskapsprogrammet med matematikprofil tycker också att gymnasiet är bättre än grundskolan:

"På gymnasiet har det varit mycket bättre, men det är nog för att jag går matteinriktning. [...] Dels har jag en mattelärare som kan hjälpa mig och dels håller jag på med andra uppgifter än tidigare. Det är fortfarande inte så att skolan har gett mig en tydlig väg att sikta på, men det har Skolornas matematiktävling gett mig."

Gerholm

Anpassade grupper och särskild undervisning

I intervjuerna framkommer att 6 av 15 har fått anpassad undervisning under sin skolgång. För fyra av dessa sex handlar det om att få läsa första gymnasiekursen (Ma A eller Ma 1c) redan i grundskolan. Emil läste de första åtta åren tillsammans med sina klasskamrater, men ”i mitten av nian började vi och slutförde första kursen i gymnasiet” sedan dess har Emil legat en kurs före sina klasskamrater under hela gymnasietiden.

Daniel är den enda av de intervjuade som fått specialundervisning genom hela grundskolan och också en av dem som läst flest universitetskurser. Han berättar om hur han tidigt tilläts accelerera i grundskolans matematikundervisning:

”Och sedan har jag haft väldigt bra lärare som varit jätteviktiga. Redan i 1-5 skolan fick jag träffa en lärare ensam och göra min egen matte. [...] Sen var jag klar med högstadiet i fyran och i femman började jag här på Arbetarskolan, i Mattegruppen. Jag tror att jag gjorde så att jag gick hit en gång i veckan [...] och så gjorde jag normal NV-takt. Jag läste Ma A och B i femman C och D i sexan, E i sjuan.”

En av dem som velat läsa mer i grundskolan men som inte fick den möjligheten är Christian ”Jag hade velat läsa mer i högstadiet, men det gavs inte möjlighet.” en uppfattning som delas av Carina ”om det funnits [möjligheter att läsa in extrakurser] hade jag absolut gjort det.”

Individanpassad undervisning i ordinarie klass

De intervjuades utsagor visar på en stor variation gällande undervisningen i klassrummet. Visserligen har de flesta (11 av de 15) intervjuade periodvis fått berikning eller givits möjlighet att accelerera genom kurserna, men det har saknats en tydlig plan både från lärarens sida och i skolans organisation, vilket gjort att tidigare försprång i en matematikkurs bromsats av läraren, andra ämnen eller av lättja hos eleven. När eleverna tillåtits att accelerera är det tydligt att många uppskattar det. Niclas räknade i samma takt som sina klasskamrater fram till jullovet i gymnasiets första årskurs då han satte fart:

”Jag gjorde klart den [1c boken] tills lite före jul, sedan fick jag 2c-boken och gjorde klart den under jullovet, sedan fick jag 3c-boken och gjorde klart den under våren och så hann jag göra kurs D och E under våren i ettan.”

Niclas lärare uppmuntrade Niclas att accelerera, men flera av respondenterna har upplevt motsatsen. Rafaels försprång och glädjen i att jobba försvann i högstadiet:

”Jag och en kompis började med åttans mattebok i sexan. Jag kom inte ihåg om vi gjorde hela eller inte, men sen i sjuan när vi gick upp i högstadiet tyckte vår lärare att vi skulle göra åttans bok igen och så gjorde vi den. Och i åttan tyckte han att vi skulle göra åttans mattebok igen så det stod stilla där. Rätt mycket ...”

Sarah beskriver också hur svårt det kan vara för en lärare att se och förstå det begåvade barnets behov av utmaningar:

"[läraren] sa: "Tycker du inte att det är viktigare att hjälpa dem som underpresterar? Du klarar ju dig själv". Men så är det ju inte. Hur ska en sätteklassare veta var jag ska få utmaningar ifrån? Vissa kanske kan det, men det kunde inte jag, jag kunde inte ta hand om mig själv. Mitt intresse hade bara sjunkit. Men det fattar inte folk, att man behöver hålla igång elever med utmaningar."

Ungdomarna upplever det helt enkelt svårt att på egen hand ansvara för sin utveckling.

Verksamheter inom eller utanför skolan

Matematikklubbar och studiecirklar

Endast fem av respondenterna har deltagit i matematikklubbar. Klubbarna har sinsemellan haft olika karaktär. Christian gick på en studiecirkel som hölls kvällstid på högskolan. Initialt tyckte Christian om kursen, men tröttnade då problemen uppfattades som tråkiga. Christian säger:

"Den föreläsning som jag var på var väldigt bra. Det är ett bra koncept. Anledningen att jag slutade var att jag tappade intresset för kursen och det var lite långsamttempo, men det var fortfarande mycket högre nivå än här [i skolan]."

Maria träffade en av lärarna på spetsgymnasiet i en matematikklubb redan när hon gick i femte klass och det är en av anledningarna till att hon senare sökte in till gymnasiet. Daniel har inom ramen för sin specialundervisning också getts möjlighet att träna på tävlingsmatematik och diskutera problemlösning med lärarna.

Emma och Rafael går i en grupp som tillsammans med en universitetslärare en gång i veckan diskuterar problem och tävlingsmatematik. Emma förklarar "en gång i veckan går vi dit och diskuterar matematik eller olika satser och problem".

Tävlingsmatematik

Eftersom urvalet i studien består av finalister i Skolornas matematiktävling är det uppenbart att samtliga ägnat sig åt tävlingsmatematik. Av enkätsvaren framkommer att 13 av 27 elever har erfarenheter av flera olika matematiktävlingar, 11 har deltagit i någon annan tävling och att tre endast har deltagit i Skolornas matematiktävling tidigare. Ingen av finalisterna skrev tävlingen för första gången det år de gick till final. Förberedelserna inför tävlingen varierar mycket bland de intervjuade. "Jag skrev kvalificeringen för att jag tyckte det var roligt. Jag var inte så tävlingsinriktad" säger Christian om sin prestation. Adrian hade förberett sig ganska väl och var inte helt förvånad över att komma till final:

Gerholm

"Det var jätteroligt, jag hade jobbat rätt hårt med tävlingsmatematik under sommaren och även året innan. Så det var inte överraskande."

Daniel som tävlat mycket låter lite besviken över sin placering:

"Jag har varit i final två gånger tidigare så detta var min tredje gång och ja själva tävlingen var lite annorlunda än normalt – lite svårare kanske. [...] målet var ju att vinna så det var en liten missräkning kan jag säga."

Vilken roll tävlandet haft för den matematiska förmågens utveckling skiljer sig också mycket åt mellan finalisterna. För Sarah har tävlandet betytt oerhört mycket:

"Där [Kunskapsskolan i sjätte klass] blev jag också introducerad till mattetävlingar och det känns som om det är genom mattetävlingar som jag lyckats behålla intresset för mattem för där får jag verkligen utmaningar. Jag tror att jag hade tappat intresset om jag bara hade hållit på med skolmatte."

Adrian håller med om att det är utmaningarna från tävlingsmatematik som är det viktiga, för honom är inte själva tävlandet så betydelsefullt:

"Tävlingen gör att man känner någon slags status i att klara uppgiften, men just att vara bättre än andra är inte viktigt. Det hade inte gjort mig något om det hade funnits 20 andra som varit bättre än mig bara jag hade fått komma till finalen och fortsätta med korrespondenskursen. Det är det som är det roliga."

För Emil har tävlandet också betytt mycket. Både för självförtroendet och för lusten att lära sig matematik.

"Jag har fått ett högre självförtroende för matte. När vi gick i nian vann mitt lag tävlingen Pythagoras Quest. Drivkraften och viljan att jobba vidare med matte har vuxit och att träffa likasinnade som man får på finalen som också är intresserade. För så har det aldrig varit tidigare, man har träffat några stycken men aldrig på den nivån."

Återkommande i enkäterna och intervjuerna förknippas tävlingsmatematiken med stimulerande utmaningar (till skillnad från skolmatematiken), glädjen över att lösa problem och att träffa likasinnade som anledning till att eleverna vill ägna sig åt tävlingsmatematik. Några nämner också tävlingsmomentet och viljan att vara bäst.

Studentkonferenser

Endast två av respondenterna pratar om matematikkonferenser under intervjuerna, Fredrik endast i förbigående, men Sarah berättar att:

"Kunskapsskolan är bra för de har en mattespets för alla sina elever och de bästa får åka på ett träningsläger varje år i Stockholm och lära sig mer matte. De satsar verkligen på matte och problemlösning och sådana saker."

Finalen i skolornas matematiktävling är inte en konferens, men efter det att tävlingen skrivits ges möjlighet att umgås och senare på kvällen äter deltagarna middag med arrangörerna. Alla intervjuade upplever att det var roligt att träffa likasinnade som delade deras intresse för matematik. Fredriks berättelse sammanfattar finalisternas erfarenheter på ett fint sätt:

"Det var första gången jag fick tillfälle att diskutera vackra formler. Jag satt bredvid en kille på middagen efter det att vi skrivit tävlingen och vi diskuterade formler och om de var vackra eller inte. Om deras användbarhet och så. Det var väldigt roligt. Annars är jag ganska ensam om det. Man pratar ju mycket med folk, men om man pratar matte med folk så hänger de inte med och de kan inte förstå min fascination för matte."

En tolkning av detta är att intresset för konferenser finns, men att utbudet är relativt begränsat.

Verksamheter utanför skolan

Universitetsstudier utöver ordinarie skola

Av de 15 finalister som intervjuats är det endast två som läst kurser på universitetsnivå som inte ingår i deras ordinarie gymnasieutbildning. Elva läser eller kommer att läsa linjär algebra inom ramen för sitt gymnasieprogram på universitetet eller på skolan. Två elever läser på IB och är nöjda med den matematik de får där.

De två elever som läser kurser på universitet/högskola utöver gymnasieprogrammet uppger att de är nöjda med att få läsa i egen takt, men de har inte tagit ut några högskolepoäng. Dels för att man inte får tävla i olympiaden om man har tagit ut högskolepoäng och dels för att högskolan kräver gymnasieexamen för att kunna anta elever till kurser. Daniel berättar:

"I åttan läste jag Algebra och analys på universitetet. Då åkte jag till [gymnasiet] och de hade lärare som undervisade i de kurserna. Så jag åkte bara [till universitetet] och tenterade av kurserna. I nian läste jag linjär algebra och diskret matte."

Daniel har läst 45 högskolepoäng, men satsar mest på tävlingsmatematik vid intervju tillfället för att kunna ta en plats i olympialaget.

Distanskurser

Av de intervjuade finalisterna är det bara Adrian som uppger att han deltagit i en

Gerholm

distanskurs innan finalen. Det var en sommarkurs som erbjöds alla elever som läste vid någon av regionens spetsgymnasium eller profilklass med matematikinriktning

”... men, det var nog bara fyra stycken som gick den. Den var väldigt bra. Det var typ tävlingsmatematik. Och det var fyra månaders korrespondenskurs.”

Alla finalister erbjuds att delta i Matematikersamfundets korrespondenskurs, men kursen är krävande och graden av deltagande varierar. Sex av de intervjuade finalisterna uppfattade korrespondenskursen som för svår eller tidskrävande och gav sig aldrig riktigt in i kursen, fem av dem satsade fullt ut och hade vid intervjutillfället ambitionen att genomföra hela kursen. Övriga fyra intervjuade finalister påbörjade kursen, men hoppade av efter några omgångar då de tyckte att problemen blev för svåra och tidskrävande.

De intervjuade som valde att satsa på kursen ger en i stort sett entydig bild av korrespondenskursen. Den är rolig, extremt utvecklande och mycket tidskrävande.

”ja, den [korrespondenskursen] lägger jag ned jättemycket tid på och den är väldigt rolig. Jag känner att jag utvecklats mycket mer än i skolan. [...] Vi får sex uppgifter var tredje vecka. De är jättesvåra. De senaste fick jag för en vecka sedan och har inte kommit någon vart fast jag lagt ned kanske tio timmar. Och totalt blir det kanske ytterligare 30-40 timmar på två veckor” säger Adrian.

Niklas satsar också hårt på korrespondenskursen:

”[jag lägger ned] väldigt mycket tid. Det blir att man sitter på helgerna och jobbar lite, kanske 4 timmar per dag lördag och söndag och så på mattelektionerna och ibland på eftermiddagarna. [...] det blir] mellan 10 och 20 timmar/vecka”

Det finns alltså stora möjligheter till utveckling för dem som är beredda att lägga ned den tid och energi som krävs för att genomföra hela korrespondenskursen. Adrian lägger väldigt mycket status i att klara korrespondenskursens problem, vilket ger honom den vilja som krävs för att fortsätta jobba med problemen:

”[...] det beror på hur mycket status jag ser i problemet. Korrespondenskursproblemen ger jag ju inte upp. Det handlar ju om trettio timmar innan jag ger upp en uppgift. Så är det ju inte med andra problem. Ser jag ett problem på internet som verkar intressant håller jag på kanske max en timme, sen kollar jag på svaret.”

Det verkar som om tävlingsmatematik och den träning som korrespondenskursen erbjuder skapar en möjlighet till sammanhang som annars är svårt att uppbringa utanför skolans kurser.

Handledning av universitetslärare

Ingen av de intervjuade finalisterna får handledning av en universitetslärare om man avser personlig vägledning inom matematiken. Dock träffar alla som går på matematiska spetsgymnasier (18 av 27) disputerade matematiker i sin undervisning, vilket de ofta uppskattar. Sarah förklarar:

”Det som är bra med våra lärare här är att de kommer från universitetsvärlden så de har perspektivet och kan berätta vad man kan satsa på och tar med oss till universitet och går in i allt både grundläggande och på djupet.”

Christian kontaktade en doktorand för att få råd angående sitt gymnasiearbete, vilket han senare uppskattade:

”jag kontaktade en doktorand på KTH och fick detta rekommenderat för mig som ett område. Nu förstår jag att det här är jätteroligt och jag skulle vilja lägga så mycket mer tid på det.”

Korrespondenskursen leds av matematiker så alla finalister som vill kommer i kontakt med universitetslärare, men direkt handledning är inte vanligt förekommande bland deltagarna i studien.

Verksamheternas betydelse för eleverna

Det framkommer av elevernas utsagor att omfattning och betydelse av deltagandet i de analyserade verksamheterna varierar mellan individerna. Några tydliga mönster går dock att urskilja.

Deltagarna i studien har inte gått i klasser med matematikinriktning i någon större utsträckning i grundskolan, däremot är det vanligt förekommande på gymnasiet. Samtliga ungdomar i studien, förutom de två som läste på IB, läser på naturvetenskapsprogrammet och 18 av 27 har valt en klass med matematisk inriktning. Eleverna uppfattar att de på gymnasiet har engagerade lärare med djupa ämneskunskaper, ambitiösa klasskamrater och generellt sett fler utmaningar än de hade på grundskolan.

Så gott som alla intervjuade har periodvis fått accelerera genom matematikkurserna, men många har också bromsats i sin utveckling, till exempel genom att de tvingats läsa samma kurs flera gånger, vilket uppfattats som tråkigt och meningslöst. Respondenterna uppskattar de perioder då de tillätits accelerera och de har då utvecklats fort. Det har enligt studiens deltagare berott på den enskilde läraren och skolans organisation huruvida de givits möjlighet att läsa i egen takt eller ej.

Urvalet i denna studie innebär att samtliga respondenter ägnat sig åt tävlingsmatematik i någon omfattning. Urvalmetoden har genom sin utformning alltså uteslutit matematiskt begåvade elever som inte tävlat i matematik. Det framkommer i studien att tävlingsmatematiken har haft väldigt olika stor betydelse för deltagarna. Gemensamt för alla är att de uppskattar utmaningen i tävlingsproblemen och att de får använda hela sin matematiska kunskap, till skillnad från det de uppfattar som mer

Gerholm

snäva problemformuleringar som de möts av i skolan. Några få tycker också om själva tävlingsmomentet. För vissa av studiens respondenter har tävlingsmatematiken betydtt otroligt mycket. Det är genom denna de funnit utmaningar och lust att träna matematik flera timmar i veckan. Utan tvivel har tävlingsmatematiken och korrespondenskursen som erbjöds finalisterna varit de verksamheter som haft störst påverkan på respondenterna.

Deltagande i anpassade grupper i grundskolan har främst förekommit i nionde årskursen då eleverna har givits möjlighet att läsa gymnasie matematik i förväg. De få elever som uppmuntrats att accelerera och fått stöd av lärare har nått betydligt längre i sin matematiska utveckling och verkar mer nöjda med sin utbildning än de som följt ordinarie undervisning.

Deltagande i matematikklubbar och studiecirkel, studentkonferenser och distansstudier (korrespondenskursen undantagen) förekommer i liten utsträckning och verkar inte ha haft någon större betydelse för dessa ungdomar. Inte heller förekommer handledning av universitetslärare i någon större utsträckning bland respondenterna. Detta kan bero på att många av respondenterna träffar universitetslärare inom ramen för sitt gymnasieprogram. Endast två deltagare har läst universitetskurser utöver vad som läses på gymnasieprogrammet. Det kan i sammanhanget tyckas märkligt med tanke på att studien omfattar några av landets mest matematiskt begåvade ungdomar.

Sammanfattningsvis kan vi konstatera att flera av ungdomarna gärna hade velat gå fram snabbare i grundskolans kurser om det varit möjligt och om det funnits ett system som uppmuntrade det. Gymnasiet uppfattas generellt sett ge fler utmaningar även om matematiken fortfarande ofta upplevs som enkel. Respondenterna anser att tävlingsmatematiken erbjuder dem utmaningar i form av intressanta matematiska problem som hos vissa medfört att de studerat matematik i långt större utsträckning än vad skolans kurser kräver.

Diskussion

När studien sätts i sitt sammanhang är det värt att minnas att alla finalister har haft tillräckligt goda förutsättningar för att utvecklas väldigt långt matematiskt. Det vill säga: givet att Mönks modell är korrekt verkar elevers erfarenheter ha varit tillräckligt gynnsamma för att få till stånd en utveckling av de matematiska förmågorna. Därmed inte sagt att alla respondenter haft optimala förutsättningar i varje enskild faktor eller att de utvecklats maximalt utifrån sina förutsättningar. Precis som tidigare forskning visar (Mönks & Ypenburg, 2009) har även dessa matematiskt begåvade ungdomar ofta funnit skolans undervisning tråkig och meningslös. Konflikter med lärare förekommer, men ungdomarna i studien har trots detta alltid presterat på topp i matematik.

Ingen av eleverna ger uttryck för att de verksamheter som behandlats i studien har varit till men för deras matematikintresse, tvärtom. Leikins uppmaning (2009) att matematiskt begåvade elever ska erbjudas dessa verksamheter finner alltså ett visst stöd i denna studie, men betydelsen av deltagande i verksamheterna varierar. Samt-

liga verksamheter innebär någon form av acceleration eller berikning eller en kombination av dessa. Dock har de olika möjlighet att utveckla ungdomarnas matematiska förmågor och skapa förutsättningar för den, enligt Ziegler och många andra, helt nödvändiga träningen i form av "deliberate practise" (Ziegler, 2010).

Med utgångspunkt i de intervjuade elevernas perspektiv tyder studien på att de verksamheter som lett till störst utveckling och som verkar ha stimulerat ungdomarna mest är dels accelerering, genom att de har fått arbeta sig igenom lärostoffet i snabbare takt eller på högre nivå än sina klasskamrater, och dels tävlingsmatematik i dess olika former. I detta avseende kompletterar studiens resultat tidigare forskning. Det finns sedan tidigare vetenskapligt stöd (Sowell, 1993; Ziegler, 2010) för att acceleration har betydelse för elevernas utveckling, vilket inte motsägs i denna studie. Men resultaten antyder också att tävlingsmatematik kan vara en berikningsform som har stor betydelse för ungdomars matematiska utveckling.

Sammanhang med tydligt synliggjord progression

Studien ger ingen förklaring till varför just dessa verksamheter, acceleration och tävlingsmatematik, sporrar till utveckling, men en gemensam faktor är att det sammanhang som dessa verksamheter skapar gör det lättare att synliggöra en progression inom ämnet. Detta gäller för eleven så väl som för läraren. Att matematikkurserna i skolan innebär progression är uppenbart: kurserna bygger på varandra och läses i en viss ordning. Tävlingsmatematiken är inte lika styrd, men det finns en tydlig progression även här, med tävlingar på olika nivåer, finaler och olympiader. Tävlingarna erbjuder på så vis ett parallellt spår till skolans kurser.

Tävlingsproblemen finns tillgängliga för alla och man måste inte tävla för att lösa dem, men det är samtidigt lätt att relatera till jämnåriga eftersom tävlingarna ofta är styrda efter ålder och förväntade förkunskaper. Vetskapen om att jämnåriga elever löser samma problem ger de tävlande en indirekt kontakt med sina "peers", vilket är en av faktorer i Mönks modell (Mönks & van Boxtel, 1985). I en undervisningsmiljö är det lätt att tänka sig att vissa elever föredrar acceleration, medan andra föredrar den berikning som tävlingsproblemen innebär. Respondenterna vittnar om att korrespondenskursens problem blir svårare ju längre kursen fortgår och eftersom många deltar flera år i följd kan de själva se att de utvecklats eftersom de klarar av flera problem. De deltagare som tränar på tidigare tävlingsproblem eller aktivt deltar i korrespondenskursen får alltså den nödvändiga träning som krävs för att utveckla sina matematiska förmågor (Ziegler, 2010).

Sommarkurser, studiecirklar och enstaka fördjupande uppgifter från läraren uppskattas av dem som deltar, men verkar enligt utsagorna ha mindre effekt på elevernas utveckling. Kanske för att dessa verksamheter inte erbjuder deltagarna tydliga mål att sträva mot. Inom de flesta domäner finns tydliga regler och en allmän acceptans för vad som räknas som goda prestationer. Individerna vet då vad man tränar för, hur man tränar och varför. Hur den egna utvecklingen ska formas blir tydliggjord på ett helt annat sätt än vad den blir i mer diffust definierade berikningsverksamheter som studiecirklar och sommarkurser även om uppgifterna i princip skulle kunna vara de

Gerholm

samma.

Med tanke på urvalet av respondenter, finalister i en matematiktävling, kan man invända mot studiens relevans då dessa elever förväntas tycka matematiktävlingar är utvecklande, men resultatet visar på en intressant aspekt i förhållande till alternativa matematiska aktiviteter. Det hade varit fullt tänkbart, och kanske mer rationellt, att respondenterna hade satsat på meriterande universitetskurser eller andra ämnen för att höja sina slutbetyg och kanske någon gång per år deltagit i en matematiktävling. Men för flera av respondenterna betyder tävlingarna och dess kontext mer än skolmatematik, meriterande kurser eller höga slutbetyg.

Sammanfattningsvis kan sägas att studiens matematiskt begåvade elever uppskattar verksamheter som erbjuder dem utmaningar i ämnet, men av deras utsagor att döma verkar inte alla verksamheter ha samma potential att sporra dem till vidare utveckling. Av resultatet framkommer att acceleration och tävlingsmatematik är de verksamheter som av eleverna uppfattats ha haft störst betydelse. En möjlig tolkning av detta är att verksamheter som erbjuder ett sammanhang med tydlig progression är att föredra för att stödja utvecklingen av den matematiska förmågan hos matematiskt begåvade elever.

Referenser

- Bloom, B. S. (1985). *Developing Talent in Young People*. New York: Ballantine Books.
- Brinkman, S. & Kvale, S. (2009). *Den kvalitativa forskningsintervjun*. Lund: Studentlitteratur AB.
- Dahl, T. (2011). *Problemlösning kan avslöja matematiska förmågor: Att upptäcka förmågor i en matematisk aktivitet*. (Lic.-avh.) Växjö: Linnéuniversitetet.
- Esaiasson, P., Gilljam, M., Oscarsson, H. & Wängnerud, L. (2007). *Metodpraktikan - konsten att studera samhälle, individ och marknad*. Stockholm: Norstedts juridik.
- Hunt, B. (1996). The effect on Mathematics Achievement and Attitude of Homogeneous and Heterogeneous Grouping of Gifted Sixth-grade Students. *The Journal of Secondary Gifted Education*, vol. 8, nr. 4, ss. 65-73.
- International Mathematical Olympiad Foundation (2015). *Activities - The organization of the International Mathematical Olympiad*. [Hämtad den 7 okt. 2015 från <http://imof.co/about-imo/activities>].
- International Mathematical Olympiad Foundation (2015). *About IMO - Vision*. [Hämtad den 7 okt. 2015 från <http://imof.co/about-imo/vision>].
- Krutetskii, V. A. (1976). *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren*. Chicago & London: University of Chicago Press.
- Leikin, R. (2009). Bridging Research and Theory in Mathematics Education with Research and Theory in Creativity and Giftedness. I: R. Leikin, A. Berman, & B. Koichu (red.), *Creativity in Mathematics and the Education of the Gifted Students* (ss. 385-411). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.
- Leikin, R. (2010). Teaching the Mathematically Gifted. *Gifted Education Internatio-*

- nal, vol. 27, ss. 161-176.
- Mattson, L. (2013). *Tracking Mathematical Giftedness in an Egalitarian Context*. (Diss.) Göteborg: Göteborgs Universitet.
- Mönks, F. J. & van Boxtel, H. W. (1985). Gifted Adolescents: A Developmental Perspective. I Freeman, J. (red.), *The Psychology of Gifted Children - Perspectives on Deleptomment and Education* (ss. 275-295). New York: John Wiley & Sons.
- Mönks, F. J., & Ypenburg, I. H. (2009). *Att se och möta begåvade barn*. Stockholm: Natur & Kultur.
- Nationellt centrum för matematikutbildning (2014). *Vad är Kängurun - Matematikens Hopp?* [Hämtad den 18 juni 2015 från <http://ncm.gu.se/node/1525>].
- Nevo, B., & Rachmel, S. (2009). Education of gifted children: a general roadmap and the case of Israel. I: R. Leikin, A. Berman & B. Koichu (red.), *Creativity in Mathematics and the Education of Gifted Children* (ss. 243-252). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.
- Petterson, E. (2011). *Studiesituationen för elever med särskilda matematiska förmågor*. (Diss.) Växjö: Linnæus University Press.
- Petterson, E. & Wistedt, I. (2013). *Barns matematiska förmågor - och hur de kan utvecklas*. Lund: Studentlitteratur AB.
- Renzulli, J. S. (1978). What Makes Giftedness? Reexamining a Definition. *Phi Delta Kappan*, vol. 60, nr. 3, ss. 180-184 och 261.
- SFS 2010:800. *Skollag*. Stockholm: Utbildningsdepartementet.
- Skolverket (2014). *Redovisning av uppdrag enligt förordning (2008:793) om försöksverksamhet med riksrekryterande gymnasial spetsutbildning*. Dnr 2014:329. Stockholm: Fritzes.
- Skolverket (2015a). *Att arbeta med särskilt begåvade elever*. [Hämtad den 31 maj 2015 från <http://www.skolverket.se/skolutveckling/larande/sarskilt-begavade-elever-1.230661>].
- Skolverket (2015b). *Skolor med spetsutbildning*. [Hämtad den 18 maj 2015 från <http://www.skolverket.se/skolformer/grundskoleutbildning/spetsutbildning/skolor-med-spetsutbildning-1.155768>].
- Sowell, E. J. (1993). Programs for Mathematically Gifted Studets: A Review of Empirical Research. *Gifted Child Quarterly*, vol. 37, ss. 124-131.
- Subotnik, R. F., Pillmeier, E., & Jarvin, L. (2009). The Psychosocial Dimensions of Creativity in Mathematics: Implication for Gifted Education Policy. I: R. Leikin, A. Berman, & B. Koichu (red.), *Creativity in Mathematics and the Education of Gifted Student*, ss. 165-180. Rotterdam, Nederländerna: Sense Publishers.
- Svenska matematikersamfundet (2014). *Skolornas matematiktävling*. [Hämtad den 20 juni 2014 från www.mattetavlingen.se].
- Sveriges kommuner och landsting (2014). *Handlingsplan särbegåvade elever 2014*. [Hämtad den 18 juni 2014 från http://www.skl.se/vi_arbetar_med/skola_och_forskola/matematiksatsning/nyheter/handlingsplan-for-att-mota-sarbegavade-elever].
- Szabo, A. (2013). *Matematiska förmågors interaktion och det matematiska minnets*

Gerholm

roll vid lösning av matematiska problem. (Lic.-avh.) Stockholm: Stockholm universitet.

Utbildningsdepartementet (2014). *Uppdrag att främja grund- och gymnasieskolors arbete med särskilt begåvade elever.* U2014/5038/S. [hämtad den 29 mars 2016 från <http://www.regeringen.se/regeringsuppdrag/2014/09/u20145038s/>]

Winner, E. (1999). *Begåvade barn.* Jönköping: Brain Books AB.

Ziegler, A. (2010). *Högt begåvade barn.* Stockholm: Nordstedts

— |

— |

|
—



|
—

Motivationsformer hos matematiskt begåvade ungdomar

Författare: Verner Gerholm

Sammanfattning

Artikeln presenterar resultatet från en studie av 14 finalister i Skolornas matematiktävling. Syftet med studien var att undersöka några aspekter av motivationens betydelse för matematiskt begåvade ungdomar. För att analysera studiens datamaterial har Deci och Ryans självbestämmandeteori använts. Resultat indikerar att inre motivation tillsammans med yttre motivation med integrerad eller identifierad kontroll är de viktigaste formerna av motivation. Samtliga av studiens deltagare hade både inre motivation samt någon eller några former av yttre motivation.

Keywords: gifted education, mathematics competition, mathematics education, mathematically gifted students, motivation, Self Determination Theory

Inledning

Intresset för matematiskt begåvade elever har ökat markant i Sverige under de senaste åren vilket bland annat märks genom ökad forskning på området (Dahl, 2011; Mattsson, 2013; Mellroth, 2014; Pettersson, 2011; Szabo, 2013) och införandet av spetsutbildningar i matematik på både högstadiet och gymnasiet (Skolverket, 2014; Skolverket, 2015). Sedan år 2015 har också det svenska Nationellt centrum för matematikutbildning en särskild webbplats för att stödja matematiklärare i arbetet med matematiskt begåvade ungdomar (NCM, 2016) och detta beror på att vi idag vet att begåvade elever ofta presterar under sin förmåga (Mönks & Ypenburg, 2009).

Det råder idag stor samstämmighet om att motivation är en viktig faktor vid allt lärande (Bandura, 1977; Deci & Ryan, 2000 a; Eccles & Wigfield, 2000; Skaalvik & Skaalvik, 2015), men trots goda förutsättningar att lyckas riskerar de begåvade barnen att uppleva skolan som tråkig och ointressant (Mönks & Ypenburg, 2009), vilket leder till att de uppfattas som lata, omotiverade och bråkiga (Ziegler, 2010). På grund av detta hamnar de i konflikt med sina lärare (Winner, 1999) och matematiskt begåvade elever utgör i dessa avseende inte något undantag (Pettersson & Wistedt, 2013).

Trots ovanstående är forskning om undervisning av matematiskt begåvade barn och ungdomar ett eftersatt område (Leikin, 2009) och det finns ett behov av fler matematikdidaktiska studier som undersöker motivationens betydelse vid lärande (Hannula, 2006). Med detta som grund presenteras i föreliggande artikel ett delresultat gällande motivation från en studie om matematiskt begåvade ungdomar. De deltagande eleverna i studien har valts utifrån att de varit finalister i skolornas matematiktävling. För att besvara studiens frågeställningar gällande olika motivationsformer hos matematiskt begåvade elever användes intervjuer som datainsamlingsmetod. Innan resultatet av studien presenteras följer en översikt av tidigare forskning samt en beskrivning av det teoretiska ramverk som använts.

Den matematiska förmågens struktur och matematiskt begåvade ungdomar

Den ryske psykologen och forskaren V.A. Krutetskii (1976) konstruerade på basis av en longitudinell studie med över 200 elever en modell över den matematiska förmågens struktur. Studien pågick under åren 1955 till 1966 (Krutetskii, 1976) och trots att 50 år förflutit har ingen större empirisk studie genomförts inom området sedan dess (Leikin, 2009) och resultaten används i hög grad av nutida forskare

(t.ex. Dahl, 2011; Leikin, 2010; Pettersson, 2011; Subotnik, Pillmeier, & Jarvin, 2009; Szabo, 2013). I

studien identifierades flera matematiska förmågor som samverkar med varandra. Krutetskii

kategoriserade förmågorna som:

A. Förmågan att *insamla och formalisera matematisk information*

- t.ex. förmågan att upptäcka den formella strukturen i ett matematiskt problem.

B. Förmågan att *bearbeta matematisk information*

- t.ex. förmågan att tänka logiskt inom områden som representeras av kvantitativa och spatiala samband samt numeriska och algebraiska symboler,
- förmågan att tänka och uttrycka sig med hjälp av matematiska symboler,
- förmågan att effektivt kunna generalisera samband, räknemetoder och egenskaper hos matematiska objekt,
- förmågan att förkorta matematiska resonemang och tillhörande beräkningar,
- flexibilitet i tänkandet samt en strävan efter klarhet, enkelhet, elegans och rationalitet i lösningar.

C. Förmågan att *minnas matematisk information*

- s.k. matematiskt minne, dvs. ett generaliserat minne för matematiska samband, typiska egenskaper, problemlösningsmetoder samt mentala strukturer för argumentation och bevisföring.

D. Ovanstående förmågor resulterar i en *allmän* och *sammansatt förmåga*, som manifesteras i ett matematiskt sinnelag. (Krutetskii, 1976, ss. 350-351) i översättning av (Szabo, 2013, ss. 27-28).

Krutetskii kunde påvisa att förmågeprofilen hos de bästa eleverna skilde sig mycket åt så till vida att ett problem som löstes grafiskt av en elev kunde lösas med logiska resonemang av en annan. Krutetskii menar också att förmågorna i allra högsta grad är utvecklingsbara och att utvecklingen sker genom matematisk aktivitet (Krutetskii, 1976).

I den här studien avses med matematiskt begåvade elever, de elever som i hög grad använder förmågorna vid matematisk problemlösning. De problem som förekommer inom tävlingsmatematik liknar problemen som Krutetskii (1976) använde i sin studie genom att de inte är rutinartade, men inte heller kräver mer kunskaper än vad eleven förvärvat i den ordinarie undervisningen. I studien användes Skolornas matematiktävling för att identifiera och välja ut de matematiskt begåvade elever som sedermera ingick i den empiriska studien. Skolornas matematiktävling kräver inte bara matematiska förmågor. Eftersom både kvaltävling och final pågår under flera timmar krävs också ett visst mått av uthållighet och motivation för att lösa alla problem, vilket också är egenskaper som Krutetskii (1976) fann hos de matematiskt begåvade elever han undersökte.

Motivation

Motivation anses av många forskare vara en av de viktigaste faktorerna vid all form av lärande (Bandura & Shunk, 1981; Deci & Ryan, 2000 a; Eccles & Wigfield, 2000; Skaalvik & Skaalvik, 2015) och detta gäller även inom begåvningsforskning. I en av de mest använda begåvningsmodellerna är Renzullis "three ring model of giftedness" (1978) anges "task commitment" tillsammans med kreativitet och intellektuella förmågor över medelnivå som de tre utmärkande karaktärsdragen hos begåvade. Med "task

commitment” avses en förmåga att uthålligt och ihärdigt ägna sig åt en specifik uppgift. Även andra begåvningsmodeller tillskriver olika former av motivation stor betydelse (Mönks & van Boxtel, 1985; Renzulli, 1978; Ziegler, 2010). I Mönks (2009) triadiska interdependensmodell utvidgas Renzullis ”task commitment” till att även omfatta de känslomässiga aspekterna av motivation samt förmågan att sätta upp långsiktiga mål och värdera risker. Motivation anses i modellen nödvändig för att individen skall kunna förverkliga sin potential. Flera forskare argumenterar också för att motivation är helt centralt för att förstå de begåvades prestationsförmåga (Subotnik, Olszewski-Kubilius, & Worrel, 2011). Traditionellt har hög begåvning förknippats med inre motivation, med vilket menas att individen ägnar sig åt aktiviteten för att det är roligt eller lustfyllt, men på senare tid har forskare kunnat konstatera att akademiskt begåvade ungdomar också drivs av yttre faktorer som till exempel att visa sina förmågor genom att prestatera bra (Subotnik, Olszewski-Kubilius, & Worrel, 2011).

Det är främst aspekter av inre motivation som Krutetskii (1976) lyfter fram när han skriver om de matematiskt begåvade ungdomarna i sin studie. Intresse och passion för matematik, ihärdighet och uthållighet i problemlösandet är några av de karaktärsdrag som beskrivs. Bilden av matematiskt begåvade ungdomar som starkt motiverade verkar överensstämma med svenska matematiklärares syn på elevgruppen. När 34 slumpvis valda matematiklärare fick beskriva vad de ansåg känneteckna matematiskt begåvade elever var motivation den vanligaste beskrivningen (Mattsson, 2010). Ett liknande resultat framkom i en studie med svenska lärarstudenter där sammanlagt 85 procent av de tillfrågade uppgav olika former av inre och yttre motivation som karaktäriserande för matematiskt begåvade elever (Sumpter & Sternevik, 2013). Värt att poängtera i sammanhanget är dock att omdömena ihärdighet och uthållighet som framkom i Krutetskii:s studie visserligen utgör tecken på motivation, men inte säger något om varför individen är motiverad. Hannula (2006) påpekar att de få studier som genomförts om motivation inom matematikdidaktik de senaste åren inte tillräckligt lyckats beskriva den detaljrikedom som finns i motivationens kvalitet (Hannula, 2006). Som kontrast nämner Hannula Deci och Ryans

(2000b) problematisering av skillnaden mellan inre och yttre motivation som ett viktigt bidrag till förståelsen av motivation. I denna studie används Deci och Ryans självbestämmandeteori för att analysera de matematiskt begåvade ungdomarnas motivation. Nedan presenteras först motivationsteorier som delvis ligger till grund för självbestämmandeteorin och som dessutom bidragit till matematikdidaktisk forskning om motivation.

Albert Banduras teori om tron på den egna förmågens¹ betydelse för att klara av uppgifter (Bandura, 1977) har haft stort inflytande på motivationsforskningen (Alexander & Murphy, 2000). Teorin slår fast att individer med en stark tilltro till den egna förmågan blir mer motiverade att anstränga sig, har större uthållighet och är bättre på att möta motgångar (Beamer, Lundberg, & Randhawa, 1993; McCoach, 2007; Skaalvik & Skaalvik, 2015). Teorin har bland annat använts för att analysera motivation inom undervisning i matematikämnet i flera studier (Alexander & Murphy, 2000). Bandura visade redan 1981 i en undersökning att upplevd självförmåga ökade intresset för aritmetik hos svaga elever (Bandura & Shunk, 1981). Vidare tyder Kranzler och Pajares studie (1995) på att tron på den egna förmågan har en direkt påverkan både på matematikängslan och problemlösningsförmåga. Att lärare bör försöka öka elevernas tilltro på den matematiska förmågan är också ett resultat kopplat till Banduras teori (Kitsantas, Cheema, & Ware, 2011). Dessutom visar McCoach hur lärare genom utbildning faktiskt kan bli bättre på att öka elevers tilltro på den egna matematiska förmågan (McCoach, 2007).

En annan betydelsefull motivationsteori handlar om förväntningar och värden (expectancy-value theory). Teorin utvecklades på tidigt 80-tal av Eccles och Wigfield (2000) och har en del gemensamt med teorin om tron på självförmåga (Bandura, 1977). Ett motiverat beteende (som att studera) bygger både på de förväntningar som individen har att lyckas och på det värde individen tillmäter ett skolämne eller en aktivitet (Eccles & Wigfield, 2000). Värdet av en aktivitet kan indelas i fyra kategorier: inre värde,

¹ "Self-efficacy belief" eller vanligare bara "self-efficacy".

nyttovärde, personligt värde och kostnad (Skaalvik & Skaalvik, 2015), vilket i viss mån överensstämmer med den uppdelning i inre och yttre motivationen som Deci och Ryan gör. Eccles och Wigfields teori har bland annat används för att undersöka huruvida matematiskt begåvade elever också är mer motiverade till att lära matematik än andra elever (Andersen & Cross, 2014) och för att förklara överrepresentationen av män inom matematikutbildningar (Dicke, Flunger, Gaspard, Trautwein, & Nagengast, 2015).

Deci och Ryans självbestämmandeteori (self determination theory, SDT²) är i dagsläget den mest inflytelserika teorin om inre motivation (Skaalvik & Skaalvik, 2015) och har vissa likheter med Eccles and Wigfields teori om förväntningar och värden. Självbestämmandeteorin beskrivs bäst som en metateori som består av sex underteorier, vilka behandlar olika aspekter av motivation. Grundtanken är att motivation ska värderas efter kvalitet och inte efter kvantitet. Därför problematiserar självbestämmandeteorin distinktionen mellan inre och yttre motivation genom att bland annat införa begreppen kontrollerad och autonom yttre motivation (Deci & Ryan, 2000 a). Självbestämmandeteorin har fått stort genomslag och inspirerat till forskning inom vitt skilda områden som idrott, undervisning, neuropsykologi, mindfulness m.m. (Self-determination theory, 2016).

Inom undervisningsforskning finns det flera studier kopplade till självbestämmandeteorin och olika former av motivation. I en metastudie med olika skolämnen framkommer den unika betydelsen av inre motivationen för framtida studieresultat (Mageau, o.a., 2014). Dessa resultat stöds delvis i en studie som visar att elever med inre motivation till matematikaktiviteter i klassrummet också i högre grad visar sig klara av matematikstudier i form av läxor i hemmet (Hagger, Sultan, Hardcastle, & Chatzisarantis, 2015). Elevers motivation ska inte uppfattas som statisk utan i hög grad påverkbar, vilket också stöds i en studie som indikerar att elevers inre motivation bland annat varierar beroende på undervisningens grad av

² I Skaalvik och Skaalvik (2015) används termen medbestämmandeteorin.

kontroll (Søvik & Valås, 1993). Detta bekräftar Hannula (2006) som påpekar att i lärsituationer är de psykologiska behoven autonomi, kompetens och social tillhörighet de viktigaste faktorerna för elevens uppsatta mål, vilket också stämmer väl överens med synen på motivation inom självbestämmandeteorin där man anser att miljöer som uppfyller de tre psykologiska behoven främjar autonom motivation och inre motivation. Särskilt betonar man vikten av autonomi och flera studier bekräftar att lärare kan stödja autonom motivation hos eleverna (Skaalvik & Skaalvik, 2015). I den här studien har självbestämmandeteorin använts för att kategorisera olika former av motivation hos matematiskt begåvade ungdomar.

Självbestämmandeteorin

Självbestämmandeteorin skiljer på olika former av motivation, vilka beror på i hur hög grad individen upplever självbestämmande (Deci & Ryan, 2000 b). Elever som inte studerar oavsett hot om bestraffning eller belöning anses vara amotiverade. Kontrollerad motivation innebär att eleven antingen studerar för att få yttre belöningar/undvika bestraffning eller känner en social press. Den autonomt motiverade eleven studerar antingen för att hen förstår värdet av bra studieresultat eller har identifierat sig själv som en flitig elev. Den högsta formen av motivation, inre motivation, innebär att eleven ägnar sig åt matematik för att hen tycker att det är roligt, intressant och spännande. Figur 1 visar hur de olika motivationsformerna förhåller sig till varandra (Deci & Ryan, 2000 b).

Motivation	Amotivation	Kontrollerad		Autonom		Inre motivation
		yttre motivation		yttre motivation		
Upplevd kontroll	Handlingen utförs inte	Yttre kontroll	Introjicerad kontroll	Identifierad kontroll	Integrerad kontroll	Inre kontroll
Lokalisering av kontroll	Avsaknad av kontroll	Utanför individen	Delvis utanför individen	Delvis inom individen	Inom individen	Inom individen
Motivationsfaktor	Ingen motivation	Yttre styrning, belöning/ bestraffning	Inre styrning, belöning/ bestraffning	Viktigt för individen	Del av identiteten	Medlet är målet
Beskrivning	Likgiltighet	Belöning/ Straff	Socialt tryck	Nyttovärde	Identitet	Glädje

Figur 1. Taxonomi för inre och yttre motivation. (Deci & Ryan, 2000 b)

I Krutetskiis (1976) beskrivning av de matematiskt begåvade ungdomarna är det främst inre motivation som framträder: intresse, en strävan och vilja att lära sig matematik och en brinnande entusiasm för ämnet är alla tydliga indikationer på inre motivation.

Syfte och frågeställning

Hur starkt motiverad en elev är bidrar i hög grad till utvecklingen av matematiska förmågor. Men avgörande för utvecklingen är också vilken *form* av motivation individen har. Med utgångspunkt i

tidigare forskning syftar denna studie till att undersöka några aspekter av motivationens betydelse för matematiskt begåvade ungdomar. Mer specifikt ska följande frågeställningar besvaras:

- Vilka av självbestämmandeteorins motivationsformer framträder i samtal med matematiskt begåvade elever?
- Skiljer de matematiskt begåvade ungdomarna sig åt gällande motivationsprofil?

Den första frågeställningen behandlar alltså den intervjuade gruppen matematiskt begåvade ungdomar som helhet och den andra frågeställningen fokuserar eventuella skillnader gällande motivationsformer mellan individerna.

Enkät och intervjustudie

Denna artikel redovisar ett delresultat av en större studie vars övergripande syfte var att undersöka matematiskt begåvade ungdomar med avseende på Mönks (1985) flerfaktormodell. I Mönks modell ingår faktorerna: höga intellektuella förmågor, motivation, kreativitet, skola, hem och vänner. I en tidigare artikel har skolan och särskilt utvecklande verksamheter behandlats (Gerholm, 2016) och i denna studie fokuseras motivation. Den övergripande studien inspirerades av Benjamin S. Blooms (1985) expertstudie på 120 världsledande individer inom matematik, neurologi, tennis, simning, piano och skulptur. Omfånget har dock begränsats till faktorerna i Mönks modell och att det endast är elever som står för uppgiftslämnandet (Blooms studie involverade även föräldrar och lärare). Som en följd av detta tar forskningsfrågorna sin utgångspunkt i elevernas uttalanden om motivation, vilket i sin tur har styrt val av datainsamlingsmetod. Blooms samlade erfarenheter efter fyra års intervjustudier med de 120 experterna, deras föräldrar och lärare styrker intervjun som datainsamlingsmetod: "[...] *we acquired greater and greater confidence in the value of the retrospective-interview approach to the study of talent development.*" (Bloom, 1985, s. 16). Med bakgrund i ovanstående samt min definition av matematiskt begåvade elever beskrivs nedan den urvalsprocess och datainsamlingsmetod som använts i studien.

För att välja ut matematiskt begåvade elever användes finalisterna i Skolornas matematiktävling. Först genomfördes en pilotstudie med tre finalister som resulterade i en enkät som byggde på Mönks flerfaktormodell. Cirka 1 000 elever deltog i kvaltävling i Skolornas matematiktävling. Av dessa gick 29 vidare till final. Alla 29 finalisterna erbjöds efter finalen att delta i en enkätstudie som utöver grunddata innehöll frågor om elevernas familj, skolgång, betyg samt motivation. Av de 29 finalisterna valde 27 att besvara enkäten och två att avstå. Enkäten med de individuella svaren låg senare till grund för intervjuerna vilket gjorde att enkätsvaren kunde valideras, förfinas och nyanseras under intervjustudien.

Av de 27 finalister som besvarade enkäten var 21 män och sex kvinnor. Alla finalister utom två IB-elever³, läste naturvetenskapliga programmet och av dessa 25 läste 18 ett program med matematikprofil. 14 elever läste tredje året på gymnasiet medan 13 läste andra året. Samtliga finalister uppgav att de hade högsta betyg i matematik och 24 av 27 dessutom att de har A eller B i alla eller nästan alla ämnen.

Utifrån de 27 enkätsvaren valdes 16 finalister till intervjustudien. Syftet med denna del av urvalsprocessen var att skapa så stor bredd som möjligt hos respondenterna. Deltagarna i intervjustudien valdes alltså utifrån de variationer gällande kön, föräldrars utbildningsnivå, prestationer i skolan som framkom av enkäterna. Antalet var sålunda inte bestämt på förhand utan var en konsekvens av de skillnaderna som fanns i gruppen.

De 16 utvalda respondenterna är alltså att betrakta som ett strategiskt urval utifrån principen maximal variation, en användbar metod för urval vid denna typ av studier (Esaiasson, Gilljam, Oscarsson, & Wängnerud, 2007). Resultat av studien kan på grund av detta antas spegla en större bredd av matematiskt begåvade elever än om alla respondenter liknat varandra i relevanta bakgrundsfaktorer.

Av de 16 utvalda ungdomarna intervjuades 15 (en avböjde på grund av tidsbrist). Intervjuerna genomfördes under tidsperioden januari till april. Samtliga intervjuer varade mellan 30 och 75 minuter

³ International Baccalaureate

och hölls på elevernas respektive skolor. Samtliga intervjuer bandades och transkriberades utom i ett fall där respondenten inte ville bli inspelad. De data som ligger till grund för studiens resultat utgörs av de 14 transkriberade intervjuerna.

Av de 14 respondenterna var nio män och fem kvinnor. Samtliga hade högsta betyg i matematik och tolv av dem hade dessutom A eller B i alla eller nästan alla ämnen. Tolv respondenter uppger att deras föräldrar eller annan nära anhörig bidragit till den matematiska utvecklingen i någon form. Tolv av intervjustudiens deltagare har också minst en förälder med akademisk utbildning. Sex av dem går andra året och åtta går det tredje året på gymnasiet. Alla utom två läser det naturvetenskapliga programmet och sju av dem med inriktning matematik. Två läser International Baccalaureate och har där valt avancerad matematik. De skolor och namn som nämns i artikeln är alla fingerade med hänsyn till elevernas integritet.

Eftersom intervjuaren träffat samtliga respondenter vid finaltillfället inleddes intervjuerna med frågor om Skolornas matematiktävling generellt och hur det kändes att gå till final. Därefter fick respondenterna berätta om när de själva hade förstått att de var duktiga i matematik. Utifrån respondentens svar följde sedan intervjun uppväxt, skolgång och matematisk utveckling i kronologisk ordning med möjlighet till kompletterande frågor. De teman som avhandlades i intervjuerna följde enkäten, vilket gjorde att eventuella oklarheter i enkätsvaren kunde valideras, förklaras och nyanseras. De faktorerna som behandlades under intervjuerna var familj, vänner, skola och motivation⁴. Under intervjuerna togs stor hänsyn till respondenternas personlighet, vilket resulterade i stora skillnader i intervjuerna avseende tid, frågor och ordningsföljd. Dock avhandlades samma teman under samtliga intervjuer. I denna artikel behandlas bara den del av studien som berör motivation.

⁴ Kreativitet och höga intellektuella förmågor som också ingår i Mönks modell utelämnades från intervjun. Detta eftersom faktorerna dels är svåra att undersöka i en intervjusituation och dels är svåra för individen att ha en adekvat uppfattning om.

Analys

Datamaterialet analyserades genom en innehållsanalys i två steg. I det första steget valdes alla utsagor som handlade om motivation och i nästa steg användes självbestämmandeteorins motivationskategorier som raster för att få fram vilka former av motivation som kom till uttryck hos respondenterna. Mer konkret innebar det att alla meningsbärande utsagor som i transkripten uppfattades handla om motivation kopierades, gavs ett löpnummer och kopplades till en respondent. Med meningsbärande utsaga avses här ett uttalande från respondenten som i en eller flera meningar handlar om eller visar individens motivation för matematik. Utsagorna handlar alltså bland annat om individernas känslor för matematik, varför de ägnar sig åt matematik i olika former, om de ser matematik som ett fritidsintresse eller ett skolämne m.m.

Vid den första genomgången av transkripten togs även osäkra utsagor med för att eventuellt gallras i senare skede. Vid kategoriseringen doldes namnen och alla utsagorna blandades i syfte att undvika förutfattade meningar. I enstaka fall gick respondenten att identifiera utifrån utsagans kontext, men i de flesta fall var de så kontextlösa att det var omöjligt att veta vem av respondenterna som framfört det. Analysmallen (figur 2) med kodning samt exempel på utsagor visar hur kategoriseringen utfördes. Kodningens funktion var att förenkla arbetet och underlätta förståelsen då rangordningen av de olika motivationsformerna ges av bokstavsordningen. Det finns alltså ingen djupare innebörd av kodbeteckningarna och i princip hade benämningarna för de olika motivationsformerna kunnat användas under analysen.

Motivation	Amotivation	Kontrollerad		Autonom		Inre motivation
		yttre motivation		yttre motivation		
Upplevd kontroll	Handlingen utförs inte	Yttre kontroll	Introicerad kontroll	Identifierad Kontroll	Integrerad Kontroll	Inre Kontroll
Lokalisering av kontroll	Avsaknad av kontroll	Utanför individen	Delvis utanför individen	Delvis inom individen	Inom individen	Inom individen
Motivationsfaktor	Ingen motivation	Yttre styrning, belöning/ bestraffning	Inre styrning, belöning/ bestraffning	Viktigt för individen	Del av identiteten	Medlet är målet
Beskrivning	Likgiltighet	Belöning/ Straff	Socialt tryck	Nyttovärde	Identitet	Glädje

Exempel på utsagor	<i>Jag studerar inte.⁵</i>	<i>Jag studerar för att få pengar eller för att slippa straff⁶</i>	<i>"... och så fort det gått bra för mig har mamma sagt att jag ska plugga mer"</i>	<i>"... man måste plugga för att få ett bra betyg"</i>	<i>"det är en drivkraft för mig att vara bäst"</i>	<i>"det var mycket [matematik] hemma. På helgen och så. Fredagskvällar. Det var liksom det jag tyckte var roligt."</i>
Kod	F	E	D	C	B	A

Figur 2. Analysmall: motivationsformer, koder och exempel på utsagor.

Bearbetning (Deci & Ryan, 2000 b).

Alla utsagor kategoriserades utifrån självbestämmandeteorins kategorier som kodades A-F (figur 2). Där A, inre motivation, är den högsta motivationsformen och F är avsaknad av motivation. Till kategorin A sorterades alla utsagor som beskrev att individen ansåg att matematik hade ett egenvärde, att det blivit ett intresse för dem (inte bara ett skolämne) eller att de kände glädje och lust när de studerade matematik. Till kategorin B sorterades utsagor som gav uttryck för att individen tyckte om att tävla, vara bäst eller att man alltid skulle göra sitt bästa. Utsagan handlade alltså mindre om matematik och mer om ett förhållningssätt eller en personlig egenskap. Utsagorna i kategori C ger uttryck för att matematik har ett nyttovärde som medel för något annat. Det kunde handla om att man behövde matematik för att bli en bättre programmerare eller att man vill in på en viss utbildning. Till kategori D sorterades de utsagor som visade att respondenten upplevde ett socialt tryck från t.ex. föräldrar eller klasskamrater. Ingen av respondenternas utsagor kunde knytas till kategori E (yttre kontroll) eller F (amotivation). De utsagor som inte direkt handlade om motivation eller omöjligt kunde kategoriseras märktes med X och har inte tagits med i resultatet. Utsagor som inte kunde kategoriseras kunde till exempel handla om

⁵ Citatet är påhittat. Ingen utsaga från respondenterna placerades i denna kategori.

⁶ Citatet är påhittat. Ingen utsaga från respondenterna placerades i denna kategori.

motivation, men inte för matematik eller handlade om motivation för matematik, men där det inte entydigt framgick vilken motivationsform det gällde. Även negativa utsagor kategoriserades då det var möjligt. Till exempel kategoriserades utsagor av typen *"jag satt mest och gjorde ingenting, för jag hade redan högsta betyg"* in under kategori C eftersom det indikerar att eleven studerar för att nå ett betyg. Kategoriseringen av utsagorna genomfördes två gånger med tre månaders mellanrum. De utsagor som inte kategoriserades lika vid de två analystillfällena har diskuterats med ytterligare en forskare för att därefter kategoriseras eller avfärdas.

Betydelsefulla motivationsformer

Genomgången av de 14 transkripten resulterade i sammanlagt 212 utsagor som berörde motivation varav 198 kategoriserades (Se Tabell 1). Sammanlagt 127 av utsagorna handlade om glädjen och lusten att lära matematik och kategoriserades som inre motivation (kategori A). Det vill säga att matematik har ett egenvärde och något respondenterna ägnar fritiden åt. Trettio utsagor kategoriserades som autonom integrerad motivation (kategori B), vilket betyder att respondenten ger uttryck för en självbild som gör att hen vill lära sig matematik. Det kan handla om att man ser sig själv som duktig i matematik, alltid vill vara bäst i skolan eller alltid är effektiv och vill göra sitt bästa. Av de 198 kategoriserade utsagorna handlade 37 om motivation som kunde kopplas till nyttan av matematik eller höga betyg i ämnet. Motivation som bygger på insikt om kunskapernas nyttovärde betecknas som autonom identifierad motivation (kategori C). Fyra utsagor kategoriserades som yttre kontrollerad motivation i form av höga förväntningar hos föräldrar eller andra närstående. Skillnaden gentemot de tidigare kategorierna är alltså att individen vid denna form av motivation inte främst drivs av egna skäl utan av andras. Inget av de 198 utsagorna tydde på att respondenterna studerade matematik för att få yttre belöningar eller att de saknade motivation för att studera.

Tabell 1.

Summa kategoriserade utsagor – alla intervjuer	
A – Inre motivation	127
B – Autonom integrerad motivation	30
C – Autonom identifierad motivation	37
D – Kontrollerad introjicerad motivation	4
E – Kontrollerad yttre kontrollerad motivation	0
F – Amotivation	0
Summa	198

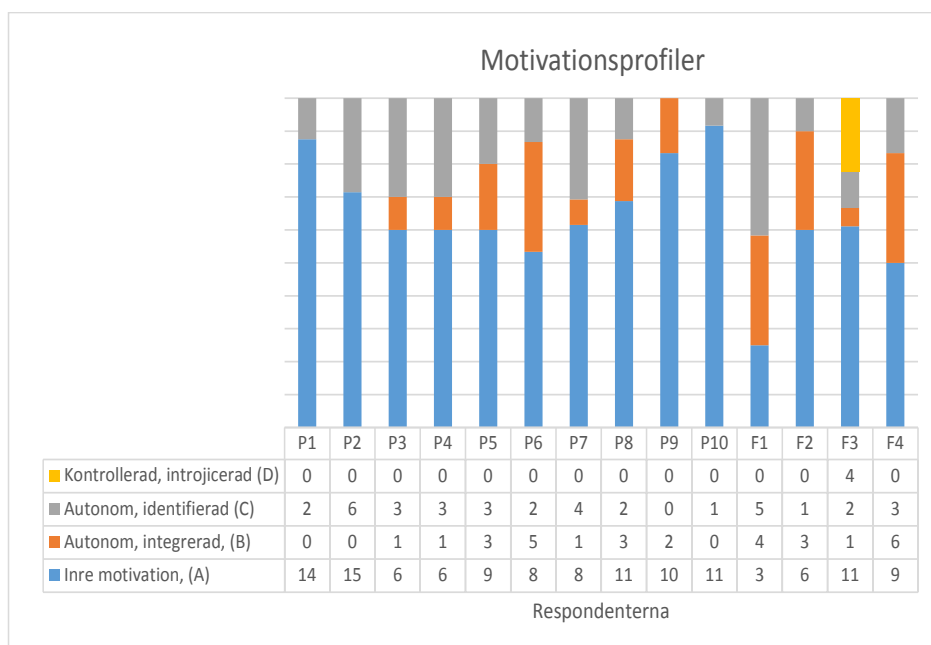
I sammanställningen över de olika motivationsformerna framträder inre motivation som den i särklass mest betydelsefulla motivationsformen hos de intervjuade ungdomarna. De två olika formerna av autonom motivation (kategori B och C) förekommer frekvent och verkar också ha haft stor betydelse för respondenterna. Övriga former av motivation kan på gruppnivå anses försumbara.

Individuella motivationsprofiler

Vad som inte framkommer i sammanställning ovan är hur de olika motivationsformerna fördelar sig på individnivå. Det vill säga vilka likheter och skillnader som finns gällande de matematiskt begåvade elevernas motivationsprofiler. Alla respondenter är i figur 3 kodade till P1-10 och F1-4 där P står för pojke och F för flicka.

Fördelat på individnivå framträder vissa aspekter av resultatet mycket tydligt. Alla de matematiskt begåvade eleverna i studien visar att de drivs av inre motivation att lära sig ämnet. Matematiken har alltså ett egenvärde för samtliga av studiens deltagare. Inte hos en enda av respondenterna förekommer dock enbart inre motivation (se figur 3). Det verkar alltså som om den inre motivationen har behövts, men inte varit tillräcklig för studiens deltagare. Av de olika formerna av yttre motivation inom

självbestämmandeteorin dominerar de autonoma formerna (kategori B och C) hos samtliga av studiens deltagare. Bara i ett fall förekommer yttre kontrollerad motivation⁷. Det vill säga i den utsträckning ungdomarna inte ägnar sig åt matematik för matematikens egen skull ägnar de sig åt matematik för att de själva vill göra det eller tycker det är viktigt. De ägnar sig alltså inte åt matematik för att leva upp till omgivningens krav eller förväntningar. Matematiken upplevs vara en viktig del av deras liv och att vara duktig i ämnet är en del av deras identitet. Resultatet gäller alla de 14 elever som deltagit i studien.



Figur 3. Respondenternas individuella motivationsprofiler.

⁷ Det gäller respondenten F3, men värt att kommentera är att hon också är mycket tacksam för det stöd hon fått hemifrån och lägger en stor del av förtjänsten på hennes utveckling på stöd hemifrån, även om det i intervjun också framträder att det finns förväntningar på att hon skall lyckas.

Sammanfattningsvis visar studiens resultat att matematiskt begåvade elever drivs av inre motivation och autonom yttre motivation (kategorierna A – C). Det existerar skillnader mellan respondenterna, men dessa är förhållandevis små. Glädje, nyfikenhet och lust sammanfattat i inre motivationen var den i särklass vanligaste motivationsformen för de deltagande ungdomarna. Att ämnet ansågs viktigt och betydelsefullt för framtida studier samt betydelsen av att vara duktig i matematik för den egna självbilden var också faktorer som förekom frekvent hos studiens respondenter.

Diskussion

Stora delar av studiens resultat överensstämmer med tidigare forskning. Det gäller den vikt respondenterna tillmäter matematiken som tydligt framgår av mängden utsagor som kopplats till nyttovärdet (kategori C), vilket har en tydlig koppling till Eccles and Wigfields förväntan-värdeteori (2000). Tidigare forskning har visat att begåvning ofta förknippas med inre motivation, men också i viss mån av yttre motivation (Subotnik, Olszewski-Kubilius, & Worrel, 2011). Denna studie stärker och kompletterar bilden dels genom att undersöka matematiskt begåvade ungdomar dels genom den nyansrikedom som självbestämmandeteorin möjliggör. Svensk forskning visar också att både lärare och lärarstudenter tillskriver matematiskt begåvade elever olika former av hög motivation (Mattsson, 2010; Sumpter & Sternevik, 2013), men studiernas fokus har inte varit på de begåvade eleverna utan på andras uppfattningar om dem. Krutetskiis (1976) studie har ett tydligt fokus på ungdomar, men har inte som huvudsyfte att studera motivation. De resultat som presenteras av Krutetskiis tyder dock på att ungdomarna i hög grad är motiverade och att detta är en viktig faktor för att utveckla matematiska förmågor. Resultaten i denna studie kompletterar alltså olika aspekter av tidigare forskning genom att studera kvalitativa aspekter hos matematiskt begåvade ungdomar. Trots att inre motivation är den starkaste drivkraften enligt självbestämmandeteorin och att samtliga respondenter visar sig ha en stark

inre motivation är det ingen som endast har den motivationsformen. Detta kan ha flera orsaker. En förklaring skulle kunna vara att elever som bara drivs av glädje till matematik (hur duktiga de än är) inte vill tävla, men en troligare förklaring är att det också krävs andra former av motivation för att bli riktigt duktig. Alla former av utveckling kräver moment som innebär frustration, repetition och tristess. Inre motivation i sin renaste form innebär en lustfylld aktivitet och jämförs ofta med barns lek. Det behövs således andra former av drivkrafter för att överbrygga de stunder som inte är lustfyllda. För att nå så långt som till final i skolornas matematiktävling krävs en hel del ansträngning längs vägen och då fyller de andra motivationsformerna sin funktion. Tävlingsanda och insikt om nyttovärde hjälper individen i stunder då den inre motivationen tryter. Den inre motivationen behövs, men är inte tillräcklig för att utveckla matematiska förmågor i den utsträckning som finalisterna har gjort.

Urvalet av deltagare i studien har betydelse på de slutsatser som går att dra. Först och främst är de deltagande ungdomarna mycket begåvade. De har placerat sig bland de trettio bästa i den mest prestigefyllda tävlingen i landet. I och med formerna för tävlingstillfället vet vi att de har uthållighet att sitta flera timmar hårt koncentrerade på matematisk problemlösning. Det framkommer också i enkätstudien att samtliga deltagare hade högsta betyg i alla matematikkurser och att nästan alla (24 av 27) hade betygen A eller B i nästan alla kurser i gymnasiet. Studiens deltagare kan med detta i beaktande också klassas som högpresterande elever. I ljuset av detta väcks flera intressanta frågeställningar för kommande undersökningar. Gäller resultatet även för begåvningar som inte är högpresterare? Vilka motivationsformer för matematik framträder som viktigast hos mer "normala" elever som inte är matematiskt begåvade? Hur kan man utforma undervisningen så att eleverna i högre grad anammar de högre formerna av motivation som verkar leda till bättre resultat? Och gäller resultatet för begåvade elever som inte tycker om att tävla?

Abstract

The article presents the results from an interview study of 14 finalists in a national mathematical competition for students in Swedish upper secondary schools. The aim of the study is to examine some aspects of the importance of motivation for the mathematically gifted adolescents. To analyze the data Deci and Ryan's Self Determination Theory has been used. The results of the study indicates that intrinsic motivation together with extrinsic motivation with integrated or identified regulation are the most important types of motivation. All students in the study had intrinsic motivation as well as some type of extrinsic motivation.

Keywords: gifted education, mathematics competition, mathematics education, mathematically gifted students, motivation, Self Determination Theory

Referenser

Alexander, P. A., & Murphy, K. P. (2000). A motivated exploration of motivation terminology.

Contemporary Educational Psychology, 25, 3-53.

Andersen, L., & Cross, T. L. (2014). Are students with high ability in math more motivated in math and

science than other students? *Roeper Review, 36* (4), 221-234.

Bandura, A. (1977). Self-efficacy: Toward a unifying theory of behavioral change. *Psychological Review,*

84 (2), 191-215.

Bandura, A., & Shunk, D. H. (1981). Cultivating competence, self-efficacy, and intrinsic interest through

proximal self-motivation. *Journal of Personality and Social Psychology, 41* (3), 586-598.

- Beamer, J. E., Lundberg, I., & Randhawa, B. S. (1993). Role of mathematics self-efficacy in the structural model of mathematics achievement. *Journal of Educational Psychology, 85* (1), 41-48.
- Bloom, B. S. (1985). *Developing talent in young people*. New York: Ballantine Books.
- Dahl, T. (2011). *Problemlösning kan avslöja matematiska förmågor: Att upptäcka förmågor i en matematisk aktivitet*. (Lic.-avh.) Växjö: Linnéuniversitetet.
- Deci, E. L., & Ryan, R. M. (2000 a). The "what" and "why" of goal pursuits: Human needs and the self-determination of determination. *Psychological Inquiry, 11* (4), 227-268.
- Deci, E. L., & Ryan, R. M. (2000 b). Intrinsic and extrinsic motivations: classic definitions and new directions. *Contemporary Educational Psychology, 25*, 54-67.
- Dicke, A.-L., Flunger, B. B., Gaspard, H., Trautwein, U., & Nagengast, B. (2015). More value through greater differentiation: gender differences in value beliefs about math. *Journal of Educational Psychology, 107* (3), 663-677.
- Eccles, J. S., & Wigfield, A. (2000). Expectancy-value theory of achievement motivation. *Contemporary Educational Psychology, 25*, 68-81.
- Esaiasson, P., Gilljam, M., Oscarsson, H., & Wängnerud, L. (2007). *Metodpraktikan - konsten att studera samhälle, individ och marknad*. Stockholm: Norstedts juridik.
- Gerholm, V. (2016). Tävlning och acceleration för utveckling av matematisk förmåga. *Forskning om undervisning och lärande, 4* (1), 25-49.
- Hagger, M. S., Sultan, S., Hardcastle, S. J., & Chatzisarantis, N. L. (2015). Perceived autonomy support and autonomous motivation toward mathematics activities in educational and out-of-school contexts is related to mathematics homework behavior and attainment. *Contemporary Educational Psychology, 41*, 111-123.

- Hannula, M. S. (2006). Motivation in mathematics: goals reflected in emotions. *Educational Studies in Mathematics*, 63, 165-178.
- Kitsantas, A., Cheema, J., & Ware, H. W. (2011). The roll of homework and self-efficacy beliefs. *Journal of Advanced Academics*, 22(2), 310-339.
- Kranzler, J., & Pajares, F. (April 1995). Role of self-efficacy and general mental ability in mathematical problem-solving: A path analysis. *Meeting of the American Educational Research Association*. San Francisco, 1995 Session 37.24.
- Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*. Chicago & London: University of Chicago Press.
- Leikin, R. (2010). Teaching the mathematically gifted. *Gifted Education International*, 27, 161-176.
- Mageau, G. A., Dedic, H., Rosenfield, S., Koest, R., Jungert, T., Taylor, G. , & Schattke, K. (2014). A self-determination theory approach to predicting schoolachievement over time: the unique role of intrinsic motivation. *Contemporary Educational Psychology*, 39, 342–358.
- Mattsson, L. (2010). Head teachers' conception of gifted students in mathematics in Swedish upper secondary school. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 15(3), 3 - 22.
- Mattsson, L. (2013). *Tracking mathematical giftedness in an egalitarian context*. (Diss.) Göteborg: Göteborgs Universitet.
- McCoach, B. D. (2007). Increasing student mathematics self-efficacy through teacher training. *Journal of Advanced Academics*, 18 (2), 278-312.
- Mellroth, E. (2014). *High achiever! Always a high achiever? A comparison of student achievements on mathematical tests with different aims and goals*. Karlstad universitet (licentiatuppsats).

- Mönks, F. J., & van Boxtel, H. W. (1985). Gifted adolescents: a developmental perspective. I J. Freeman (red.), *The psychology of gifted children - perspectives on development and education* (s. 275-295). John Wiley & Sons, Ltd.
- Mönks, F. J., & Ypenburg, I. H. (2009). *Att se och möta begåvade barn*. Stockholm: Natur & Kultur.
- NCM (2016). *Mattetalanger*. Hämtad den 27 april 2016, från <<http://mattetalanger.ncm.gu.se/>>
- Pettersson, E. (2011). *Studiesituationen för elever med särskilda matematiska förmågor*. (Diss.) Växjö: Linnaeus University Press.
- Pettersson, E., & Wistedt, I. (2013). *Barns matematiska förmågor - och hur de kan utvecklas*. Lund: Studentlitteratur AB.
- Renzulli, J. S. (1978). What makes giftedness? Re-examining a definition. *Phi Delta Kappan*, 60, 180-184.
- Self-determination theory*. (2016). *An approach to human motivation and personality*. Hämtad den 7 januari 2016, från <www.selfdeterminationtheory.org>
- Skaalvik, E. M., & Skaalvik, S. (2015). *Motivation och lärande*. Stockholm: Natur & Kultur.
- Skolverket. (2014). *Redovisning av uppdrag enligt förordning (2008:793) om försöksverksamhet med riksrekryterande gymnasial spetsutbildning. Dnr 2014:329*. Hämtad den 15 september 2016, från <<http://www.skolverket.se/publikationer?id=3285>>
- Skolverket. (2015b). *Skolor med spetsutbildning*. Hämtad den 18 maj 2015, från <<http://www.skolverket.se/skolformer/grundskoleutbildning/spetsutbildning/skolor-med-spetsutbildning-1.155768>>

Subotnik, R. F., Olszewski-Kubilius, P., & Worrel, F. C. (2011). Rethinking giftedness and gifted education: A proposed direction forward based on psychological science. *Psychological Science in the Public Interest*, 12(1), 3–54.

Subotnik, R. F., Pillmeier, E., & Jarvin, L. (2009). The psychosocial dimensions of creativity in mathematics: Implication for gifted education policy. I R. Leikin, A. Berman, & B. Koichu (Red.), *Creativity in mathematics and the education of gifted student* (s. 165-180). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Sumpter, L., & Sternevik, E. (2013). *Prospective teachers' conceptions of what characterize a gifted student in mathematics*. Hämtat den 15 september 2016, från <<http://urn.kb.se/resolve?urn=urn:nbn:se:du-11941>>

Szabo, A. (2013). *Matematiska förmågors interaktion och det matematiska minnets roll vid lösning av matematiska problem*. (Lic.-avh.) Stockholm: Stockholm universitet.

Søvik, N., & Valås, H. (1993). Variables affecting students' intrinsic motivation for school mathematics: two empirical studies based on Deci and Ryan's theory of motivation. *Learning and Instructions* 3, 281-298.

Winner, E. (1999). *Begåvade barn*. Jönköping: Brain Books AB.

Ziegler, A. (2010). *Högt begåvade barn*. Stockholm: Nordstedts.